Programme de colle S19

31 janvier au 4 février 2022

AL5 Applications

1. **Généralités**
   - ▷ Application $f : E \to F$, image d'un élément de E, antécédents éventuels d'un élément de F.
   - ▷ Ensemble image, noté $f(E)$ (analyse) ou $\mathrm{Im}(f)$ (algèbre).
   - ▷ Composée de deux applications. Application identité.
2. **Injections, surjections, bijections**
   - ▷ Définitions. Plusieurs formulations ont été données.
   - ▷ Application réciproque d'une bijection. Propriété de la réciproque.
   - ▷ Si $f : E \to F$ et $g : F \to E$ vérifient $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$.
   - ▷ Une fonction $f : I \to R$ strictement monotone sur l'intervalle I est injective de I dans $\mathbb{R}$.

Méthodes du chapitre

- ▷ Déterminer l'image d'un élément.
- ▷ Déterminer l'ensemble des antécédents d'un élément.
- ▷ Ensemble image :
  - – Cas des fonctions : dresser le tableau de variation, donner l'ensemble image par lecture du tableau.
  - – Exemples d'algèbre linéaire : l'ensemble image $\mathrm{Im}(f)$ sera donné. Il s'agit de le démontrer par double inclusion.
- ▷ Injectivité :
  - – Cas des fonctions : stricte monotonie à savoir démontrer.
  - – Cas général : $f(u) = f(u') \Leftrightarrow u = u'$
  - – Savoir aussi démontrer que f n'est pas injective avec un contre-exemple.
- ▷ Surjectivité :
  - – Pour tout $v \in F$, deviner un $u \in E$ tel que $f(u) = v$.
  - – Pour tout $v \in F$, résoudre l'équation $f(u) = v$ et montrer qu'elle a au moins une solution.
  - – Cas des fonctions : avec l'ensemble image.
  - – Savoir aussi justifier que f n'est pas surjective avec un contre-exemple.
- ▷ Bijectivité : démontrer que f est bijective de E dans F et déterminer son application réciproque, en résolvant $f(u) = v$.
  Voir également le théorème de la bijection (chapitre suivant).

AN5 Continuité

Prérequis : Études de fonctions - Limites

1. **Continuité**
   - ▷ Continuité en un point, sur un intervalle. Continuité à gauche, à droite.
   - ▷ Opérations sur les fonctions continues. Composition.
   - ▷ Prolongement par continuité en un point.
2. **Théorème des valeurs intermédiaires**
3. **Bijectivité**
   - ▷ Fonctions réalisant une bijection de I sur J : définition, représentation graphique de la réciproque.
   - ▷ Théorème de la bijection : Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur un intervalle J que l'on peut donner. La bijection réciproque associée est elle-même continue sur J et a le même sens de variation que f.
     Formulation avec le terme « équation ».
     Ce théorème donne et justifie la valeur de l'ensemble image $f(I)$.
   - ▷ Exemples d'études de suites implicites.

Méthodes du chapitre

- ▷ **Étudier la continuité d'une fonction,** en particulier celles définies en plusieurs morceaux.
- ▷ Montrer qu'une fonction peut être prolongée par continuité en un point.
- ▷ Montrer qu'une fonction réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J à déterminer.
- ▷ Dresser le tableau de variation de la réciproque associée.

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions dans la liste ci-dessous :

- Démontrer que si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective de E dans G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-z) \end{array}$ est surjective.
- Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$ est bijective et déterminer son application réciproque.
- (Exercice de cours) Montrer qu'une fonction polynomiale de degré impair donnée (on donnera un exemple concret) s'annule sur $\mathbb{R}$.
- (Exercice fait en cours) On note $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^x$.
  1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x\,\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution u_n dans $[-1, +\infty[$.
  2. Comparer $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
  3. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et calculer sa limite.