Programme de colle S18

24 au 28 janvier 2022

AN4 Limites de fonctions

1. **Limite (éventuelle) d'une fonction en a**
   - ▷ Définitions (non exigibles). Unicité de la limite.
   - ▷ Limites à gauche, à droite.
   - ▷ Limites usuelles : fonctions usuelles (puissances, inverse, racine carrée, exp, ln, valeur absolue, partie entière) ; croissances comparées et deux taux d'accroissement usuels (nouveauté) :
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$
   Notion de taux d'accroissement général hors programme.
   - ▷ Calcul de limites (opérations). Résolution de formes indéterminées.
   - ▷ Étudier la limite en un réel a où f change d'expression. On différencie le cas où f est définie en a et le cas où f n'est pas définie en a.
2. **Théorèmes**
   - ▷ Passage à la limite dans une inégalité.
   - ▷ Théorème d'encadrement, de majoration, de minoration.
   - ▷ Cas des fonctions monotones.

Méthodes du chapitre

- ▷ **Calculer une limite**.
- ▷ **Résoudre une forme indéterminée.**
- ▷ Étude de fonctions définies en plusieurs morceaux.
- ▷ Utilisation du théorème d'encadrement, de majoration, de minoration.

AL5 Applications

1. **Généralités**
   - ▷ Application $f : E \to F$, image d'un élément de E, antécédents éventuels d'un élément de F.
   - ▷ Ensemble image, noté $f(E)$ (analyse) ou $\mathrm{Im}(f)$ (algèbre).
   - ▷ Composée de deux applications. Application identité.
2. **Injections, surjections, bijections**
   - ▷ Définitions. Plusieurs formulations ont été données.
   - ▷ Application réciproque d'une bijection. Propriété de la réciproque.
   - ▷ Si $f : E \to F$ et $g : F \to E$ vérifient $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$.
   - ▷ Une fonction $f : I \to R$ strictement monotone sur l'intervalle I est injective de I dans $\mathbb{R}$.

Méthodes du chapitre

- ▷ Déterminer l'image d'un élément.
- ▷ Déterminer l'ensemble des antécédents d'un élément.
- ▷ Ensemble image :
  - Cas des fonctions : dresser le tableau de variation, puis donner (sans plus de justification) l'ensemble image par lecture du tableau.
  - Exemples d'algèbre linéaire : l'ensemble image $\mathrm{Im}(f)$ sera donné. Il s'agit de le démontrer par double inclusion.
- ▷ Injectivité :
  - Cas des fonctions : stricte monotonie à savoir démontrer.
  - Cas général : $f(u) = f(u') \Leftrightarrow u = u'$
  - Savoir aussi démontrer que f n'est pas injective avec un contre-exemple.
- ▷ Surjectivité :
  - Pour tout $v \in F$, deviner un $u \in E$ tel que $f(u) = v$.
  - Pour tout $v \in F$, résoudre l'équation $f(u) = v$ et montrer qu'elle a au moins une solution.
  - Cas des fonctions : avec l'ensemble image.
  - Savoir aussi justifier que f n'est pas surjective avec un contre-exemple.
- ▷ Bijectivité : démontrer que f est bijective de E dans F et déterminer son application réciproque, en résolvant $f(u) = v$.

Note aux colleurs

Le théorème de la bijection et le T.V.I. n'ont pas été vus.
On donnera des applications qui sont soit des fonctions, soit des applications linéaires (sur $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$).

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions dans la liste ci-dessous :

- Déterminer la limite de $x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$.
- Déterminer la limite de $x \mapsto \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ en 2.
- Déterminer les limites de la fonction partie entière en $-\infty$ et $+\infty$.
- Démontrer que si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective de E dans G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, x - z) \end{array}$ est surjective.
- Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y) \end{array}$ est bijective et déterminer son application réciproque.