Programme de colle S7

11 au 15 octobre 2021

AN2 Suites réelles

1. **Raisonnement par récurrence** (simple, double)
2. **Notion de suite**
   - ▷ Définition. Exemples de définition d'une suite : terme général explicite ou par récurrence. **! ! Note aux colleurs : pas de suite implicite.**
   - ▷ Représentation graphique : nuage de point pour une suite explicite ; méthode pour construire graphiquement les premiers termes d'une suite récurrente d'ordre 1.
   - ▷ Étude qualitative : monotonie, suite majorée/minorée/bornée.
3. **Exemples classiques**
   - ▷ Suites arithmétiques et géométriques : relation de récurrence, terme général, monotonie.
   - ▷ Suites arithmético-géométriques : définition, détermination du terme général.
   - ▷ Suites récurrentes linéaires d'ordre deux : détermination du terme général **uniquement dans le cas où $\Delta \geqslant 0$.**
4. **Limite éventuelle d'une suite**
   - ▷ Notion de convergence, de suite tendant vers $\pm\infty$.
     La connaissance des définitions rigoureuses (« $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \dots$ ») n'est pas attendue des étudiants.
     Unicité de la limite.
   - ▷ Limites usuelles : suites géométriques, croissances comparées. Calcul de la limite d'une suite par opérations.
   - ▷ Passage à la limite dans une inégalité.
   - ▷ Exemples de suites extraites : (u_{n+1}), (u_{n+2}), (u_{2n}), (u_{2n+1}).
     Si (u_n) admet une limite, alors ces suites ont également cette même limite.
     Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite, alors (u_n) a également cette limite.
   - ▷ Théorème d'existence de limite par encadrement, par majoration, par minoration.
   - ▷ Théorème de la limite monotone. **Pas de borne inf/borne sup.**
   - ▷ Suites adjacentes.

Méthodes du chapitre

- ▷ Rédiger un raisonnement par récurrence (simple ou double).
- ▷ Étudier la monotonie d'une suite.
- ▷ Reconnaître/déterminer le terme général d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique, d'une suite arithmético-géométrique ou d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux (avec $\Delta \geqslant 0$).
- ▷ Calculer la limite d'une suite connaissant son terme général.
- ▷ Démontrer qu'une suite converge par application du théorème de la limite monotone.
- ▷ Suite récurrente d'ordre 1 dont on a prouvé la convergence : savoir calculer la limite en passant à la limite dans la relation de récurrence.
  Pour résumer : connaître les méthodes utilisées dans l'exercice 3 du TD.
- ▷ **Méthode plus difficile** : démontrer par l'absurde qu'une suite récurrente monotone tend vers $\pm\infty$.

Info Calcul, fonctions, instruction if, boucles for

Le langage utilisé est python. Nous n'avons pas manipulé input.

1. **Calculs de base** (`+,-,*,**,/`)
2. Affichage avec print
3. **Définir une fonction** python. Utilisation de return.
4. Fonctions usuelles avec numpy : `import numpy as np` → `np.exp, np.log, np.sqrt, np.abs, np.floor`
5. **Instruction if**.
6. **Boucle for** : déterminer le terme de rang n d'une suite récurrente d'ordre 1.

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours dans la liste ci-dessous :

- Toute définition ou propriété du cours peut être demandée.
- (Exemple du cours) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
- (Exemple du cours) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer par **récurrence double** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.
- (ADC9) Déterminer la limite de $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.
- (ADC9) Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{n^5 + 3^n}$.
- (Informatique) Écrire une fonction `second_degre(a,b,c)` qui, étant donnés trois réels a, b, c ($a \neq 0$), renvoie les solutions réelles de $ax^2 + bx + c = 0$.