Programme de colle S17

17 au 21 janvier 2022

AL4 Polynômes

On confond polynôme et fonction polynomiale (notation $P(X)$).

Le but du chapitre est la factorisation dans $\mathbb{R}$ des polynômes. On rappelle que les nombres complexes ne sont pas au programme.

1. **L'ensemble $\mathbb{R}[X]$**
   - ▷ Définition, opérations (combinaison linéaire, produit, puissance $n \in \mathbb{N}$, composée).
   - ▷ Identification des coefficients.
2. **Degré d'un polynôme**
   - ▷ Définition, dégré d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'une composée.
   - ▷ Ensemble $\mathbb{R}_n[X]$.
3. **Racines et factorisation**
   - ▷ Notion de diviseur. Pratique de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ (énoncé du théorème non exigible).
   - ▷ Racines d'un polynôme. $a \in \mathbb{R}$ est racine de $P(X)$ si et seulement si $X - a$ divise $P(X)$. Un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ possède au plus n racines distinctes.
   - ▷ Exemples de factorisations de polynômes de degré $\geqslant 3$.
   - ▷ Polynômes du second degré : racines et factorisation (dans $\mathbb{R}$). Relation coefficients-racines.

   Notion de multiplicité hors programme.

Méthodes du chapitre

- ▷ Réaliser un calcul avec des polynômes.
- ▷ Déterminer le degré d'un polynôme.
- ▷ Déterminer les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ ($n = 1, 2$ ou 3) vérifiant telles équations, en se ramenant à la résolution d'un système linéaire.
- ▷ Montrer que a est racine d'un polynôme donné.
- ▷ Factoriser un polynôme de degré 2, si possible.
- ▷ Factoriser un polynôme de degré $\geqslant 3$ donné en identifiant d'abord une racine ou un diviseur donné. Racines considérées comme évidentes : 0, 1, -1.
- ▷ Résoudre un système du type $\begin{cases} a + b = * \\ ab = * \end{cases}$ en remarquant que a et b sont les racines d'un certain polynôme du second degré..

AN4 Limites de fonctions

1. **Limite (éventuelle) d'une fonction en a**

    ▷ Définitions (non exigibles). Unicité de la limite.

    ▷ Limites à gauche, à droite.

    ▷ Limites usuelles : fonctions usuelles (puissances, inverse, racine carrée, exp, ln, valeur absolue, partie entière) ; croissances comparées et deux taux d'accroissement usuels (nouveauté) :
    $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$
    Notion de taux d'accroissement général hors programme.

    ▷ Calcul de limites (opérations). Résolution de formes indéterminées.

    ▷ Étudier la limite en un réel a où f change d'expression. On différencie le cas où f est définie en a et le cas où f n'est pas définie en a.

2. **Théorèmes**

    ▷ Passage à la limite dans une inégalité.

    ▷ Théorème d'encadrement, de majoration, de minoration.

    ▷ Cas des fonctions monotones.

Méthodes du chapitre

▷ **Calculer une limite**.

▷ **Résoudre une forme indéterminée.**

▷ Étude de fonctions définies en plusieurs morceaux.

▷ Utilisation du théorème d'encadrement, de majoration, de minoration.

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions dans la liste ci-dessous :

- Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ deux polynômes vérifiant $P(-1) = Q(-1)$, $P(0) = Q(0)$ et $P(1) = Q(1)$ (les trois valeurs où sont évalués les polynômes peuvent varier). Montrer que $P(X) = Q(X)$.
- Déterminer la limite de $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$.
- Déterminer la limite de $x \mapsto \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ en 2.
- Déterminer les limites de la fonction partie entière en $-\infty$ et $+\infty$.