

Programme de colle S13

6 au 10 décembre 2021

AL3 Ensembles

1. Généralités

- ▷ Notations : $\in, \subset, \cap, \cup, A \setminus B, \overline{A}, A \times B, A^n$.
- ▷ Propriétés évidentes des opérations. $\overline{A \cap B}, \overline{A \cup B}$.

2. Ensembles finis

- ▷ Introduction rapide à la notion de cardinal d'un ensemble fini.
- ▷ Coefficients binomiaux : nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments. Expression avec les factorielles. Propriétés des coefficients binomiaux : symétrie, triangle de Pascal, formule du binôme. Formule du binôme matricielle.
- ▷ Exemples de dénombrements simples : tirages successifs avec/sans remise, tirages simultanés.

Méthodes du chapitre

- ▷ Montrer que $A \subset B$.
- ▷ Montrer que $A = B$ par équivalences successives ou par double inclusion.
- ▷ Réaliser un dénombrement simple.
Note aux colleurs : cette semaine, les dénombrements seront uniquement évalués dans un exercice de probabilités.
- ▷ Reconnaître la formule du binôme de Newton.
- ▷ Matrices : Calculer M^n quand $M = A + B$ avec $AB = BA$.

PS2 Probabilité sur un univers fini (début)

1. Univers - Événements

- ▷ Univers Ω (fini non vide). Événements. Opérations, événements incompatibles.
- ▷ Système complet d'événements : une famille finie d'événements (A_1, \dots, A_n) est un système complet si elle vérifie les conditions deux suivantes :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$

2. Notion de Probabilité

- ▷ Définition d'une probabilité : Une probabilité est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ et vérifiant $P(\Omega) = 1$ et $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (P est additive).
- ▷ Propriétés : probabilité d'une union d'événements deux à deux incompatibles. Si (A_1, \dots, A_n) est un système complet d'événements, $\sum_{k=1}^n P(A_k) = 1$. Formules donnant : $P(\overline{A})$, $P(A \setminus B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cup B \cup C)$. Calcul de $P(A)$ comme somme des probabilités des événements élémentaires composant A .

▷ Cas de l'équiprobabilité : **probabilité uniforme**.

Pas de probabilités conditionnelles cette semaine.

Méthodes du chapitre

- ▷ Justifier et rédiger un calcul de probabilité, dans le cadre d'une **probabilité uniforme** sur Ω :
- reconnaître une situation d'équiprobabilité ;
 - préciser l'univers Ω et son cardinal ;
 - tout calcul de cardinal (dénombrement) sera justifié précisément.

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions dans la liste ci-dessous :

- Toute définition ou propriété du cours peut être demandée. En particulier : Définition d'un système complet d'événements ; Définition d'une probabilité ; Définition de la probabilité uniforme. Dans quel cas s'applique-t-elle ?
- (Exemple du cours) Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 1\} = \{(a + 1, 3a + 4), a \in \mathbb{R}\}$ par double inclusion.
- (Démonstration) Énoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal. Savoir expliquer l'utilisation de ce triangle pour $n \leq 6$.
- (Démonstration) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ et $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.
- (Exemple du cours) On tire au hasard une main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité de l'événement B : « la main contient au moins un As ». *La réponse doit contenir une rédaction complète, avec la modélisation.*