Programme de colle S12

29 novembre au 3 décembre 2021

AL2 Calcul matriciel

1. **Ensemble des matrices**
   - ▷ Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - ▷ Matrices particulières : matrice nulle $0_{n,p}$, matrice identité I_n, matrices diaginales, matrices triangulaire.
2. **Opérations matricielles**
   - ▷ Addition, multiplication par un réel, combinaison linéaire.
   - ▷ Produit matriciel.
   - ▷ Puissances d'une matrice carrée. Cas des matrices diagonales.
     Remarque : La formule du binôme de Newton a été vue dans le chapitre AL3, elle peut être demandée.
   - ▷ Transposée d'une matrice. Transposée d'un produit. Matrices symétriques et antisymétriques. Notation ${}^tA$
3. **Matrices inversibles**
   - ▷ Définition. Inverse d'un produit.
   - ▷ Cas des matrices 2×2, des matrices diagonales, triangulaires.
   - ▷ Lien entre l'inversibilité de A et le système $AX = B$.

Méthodes du chapitre

- ▷ Réaliser un calcul matriciel : combinaison linéaire et/ou produit.
- ▷ Calculer les puissances n d'une matrice carrée :
  - – directement si la matrice est diagonale ;
  - – en calculant les premières puissances, conjecturant une formule puis avec une démonstration par récurrence ;
  - – par récurrence directe si le résultat est donné dans l'énoncé.
- ▷ Déterminer si un matrice 2×2 ou diagonale est inversible et donner son inverse le cas échéant. Déterminer si une matrice triangulaire est inversible.
- ▷ Démontrer qu'une matrice est inversible en utilisant une relation polynomiale.
- ▷ Étudier l'inversiblité d'une matrice A (taille 3, voire 4) par résolution de $AX = B$.

AL3 Ensembles

1. **Généralités**

   ▷ Notations : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, $A \setminus B$, $\overline{A}$, $A \times B$, A^n.

   ▷ Propriétés évidentes des opérations. $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$.

2. **Ensembles finis**

   ▷ Introduction rapide à la notion de cardinal d'un ensemble fini.

   ▷ Coefficients binomiaux : nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments. Expression avec les factorielles. Propriétés des coefficients binomiaux : symétrie, triangle de Pascal, formule du binôme.
   Formule du binôme matricielle.

   ▷ Exemples de dénombrements simples : tirages successifs avec/sans remise, tirages simultanés.

Méthodes du chapitre

▷ Montrer que $A \subset B$.

▷ Montrer que $A = B$ par équivalences successives ou par double inclusion.

▷ Réaliser un dénombrement simple.
Note aux colleurs : il s'agit ici de savoir dénombrer des situations qui seront utiles dans les cas d'équiprobabilités. Les dénombrements purs ne sont pas au programme.

▷ Reconnaître la formule du binôme de Newton.

▷ Matrices : Calculer M^n quand $M = A + B$ avec $AB = BA$.

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions dans la liste ci-dessous :

- Toute définition ou propriété du cours peut être demandée.
- (Exemple du cours) Déterminer les puissances de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- (Exemple du cours) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que $A^3 - 3A - 2I_3 = 0_3$ puis en déduire que A est inversible. On précisera son inverse.
- (Exemple du cours) Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 1\} = \{(a + 1, 3a + 4), a \in \mathbb{R}\}$ par double inclusion.
- (Démonstration) Énoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal.
  Savoir expliquer l'utilisation de ce triangle pour $n \leqslant 6$.