

## Programme de colle S11

22 au 26 novembre 2021

### AL2 Calcul matriciel

#### 1. Ensemble des matrices

- ▷ Ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . Ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- ▷ Matrices particulières : matrice nulle  $0_{n,p}$ , matrice identité  $I_n$ , matrices diagonales, matrices triangulaire.

#### 2. Opérations matricielles

- ▷ Addition, multiplication par un réel, combinaison linéaire.
- ▷ Produit matriciel.
- ▷ Puissances d'une matrice carrée. Cas des matrices diagonales.  
**Attention : La formule du binôme de Newton n'a pas été vue.**
- ▷ Transposée d'une matrice. Transposée d'un produit. Matrices symétriques et antisymétriques. Notation  ${}^tA$

#### 3. Matrices inversibles

- ▷ Définition. Inverse d'un produit.
- ▷ Cas des matrices  $2 \times 2$ , des matrices diagonales, triangulaires.
- ▷ Lien entre l'inversibilité de  $A$  et le système  $AX = B$ .

#### Méthodes du chapitre

- ▷ Réaliser un calcul matriciel : combinaison linéaire et/ou produit.
- ▷ Calculer les puissances  $n$  d'une matrice carrée :
  - directement si la matrice est diagonale ;
  - en calculant les premières puissances, conjecturant une formule puis avec une démonstration par récurrence ;
  - par récurrence directe si le résultat est donné dans l'énoncé.
- ▷ Déterminer si une matrice  $2 \times 2$  ou diagonale est inversible et donner son inverse le cas échéant. Déterminer si une matrice triangulaire est inversible.
- ▷ Démontrer qu'une matrice est inversible en utilisant une relation polynomiale.
- ▷ Étudier l'inversibilité d'une matrice  $A$  (taille 3, voire 4) par résolution de  $AX = B$ .

#### Info Boucles for et while

Le langage utilisé est python. Pas de input.

1. Déterminer le terme de rang  $n$  d'une suite récurrente d'ordre 1.
2. Déterminer le premier entier naturel  $n$  tel que ...
3. Calculer une somme ou un produit.

**Questions de début de colle**

La colle débutera par une ou plusieurs questions dans la liste ci-dessous :

- Toute définition ou propriété du cours peut être demandée.
- (Exemple du cours) Déterminer les puissances de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
- (Exemple du cours) Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Démontrer que  $A^3 - 3A - 2I_3 = 0_3$  puis en déduire que  $A$  est inversible. On précisera son inverse.
- (Démonstration) Justifier que si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont inversibles, alors  $AB$  l'est aussi et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- Définir en langage python la fonction factorielle.  

```
def factorielle(n):  
    p = 1  
    for k in range(1, n+1) :  
        p = p * k  
    return p
```
- Calculer une somme en python.