DEVOIR SURVEILLÉ 8

Mercredi 15 juin 2022 – 4h
Calculatrices et documents interdits.
Soignez la présentation, encadrez vos résultats et conclusions.

Informatique : soignez la présentation de vos programmes (lisibilité, indentation, etc.).

Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x+y-z,\, 2y,\, -x+y+z).$$

Partie 1

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont formées des composantes de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. En déduire le rang de f.
5. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
6. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

Partie 2

Le but de cette partie est de calculer les puissances de la matrice A définie à la question 2.

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Informatique.
   (a) On suppose la bibliothèque numpy de python chargée sous l'alias `np` (inutile de le faire pour toute la suite de cet exercice). Définir la matrice A en utilisant cette bibliothèque.
   (b) On rappelle que la commande `np.dot(A,B)` réalise le produit matriciel AB. À l'aide de cette fonction et d'une boucle, écrire un programme python qui calcule A^{20}.
8. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
9. Montrer que $A = PDP^{-1}$ avec
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
10. Quel est le rang de la matrice D ?
11. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
12. En déduire l'expression de A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie 1 : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Montrer : $b \in [2; 4]$ et $\ln(b) = b - 2$. On note $\ln(2) \approx 0,7$.

Partie 2 : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [b, +\infty[$.
5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
7. (a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $g : x \mapsto \ln(x) + 2$, montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b)$$
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
8. (a) Écrire une fonction python `suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.
   (b) Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction python suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1.  def valeur_approchee(epsilon) :
2.      n = 0
3.      while ... :
4.          n = ...
5.      return suite(n)
```

Partie 3 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt.$$

9. Justifier que $t \mapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
10. Soit H une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{f(t)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Exprimer $\Phi(x)$ à l'aide de la fonction H.
11. En déduire que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que l'on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$
12. Déterminer les variations de Φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
13. En utilisant la propriété de croissance de l'intégrale, montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.
14. Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
    On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

Exercice 3

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune $N \geqslant 3$ boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

Partie 1 : Une première expérience aléatoire

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire. On notera pour tout entier naturel i non nul :

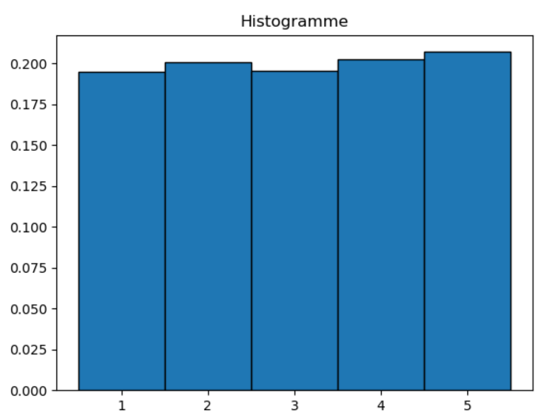
- N_i l'événement « on tire une boule noire lors du i-ième tirage ».
- B_i l'événement « on tire une boule blanche lors du i-ième tirage ».

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.

2. (a) On simule 10000 fois cette expérience aléatoire. Recopier et compléter les lignes 7, 10 et 12 du programme python suivant pour qu'il affiche l'histogramme donnant la fréquence d'apparition du rang d'obtention de la boule noire.
On rappelle les instructions suivantes du module numpy.random sous l'alias rd :
   - `rd.random()` renvoie un réel aléatoire de $[0, 1[$.
   - `rd.randint(a, b)` renvoie un entier aléatoire de $[a, b[$.

```
1.  import numpy as np
2.  import numpy.random as rd
3.  import matplotlib.pyplot as plt
4.
5.  N = int(input('Donner un entier naturel non nul : '))
6.  Liste = []
7.  for k in range(....):
8.      i = 1
9.      M = N
10.     while ... :
11.         i = i+1
12.         M = ...
13.     Liste.append(i)
14.
15. Abscisse = np.linspace(0.5, N+0.5, N+1)
16. plt.title('Histogramme')
17. plt.hist(Liste, Abscisse, density = True, edgecolor='k')
18. plt.show()
```

   (b) On exécute le programme ci-dessus, on entre 5 au clavier et on obtient ceci :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la loi de la variable aléatoire X ?

3. On se place, pour cette question seulement, dans le cas $N = 5$. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.

Pour les questions suivantes, on revient au cas général où $N \geqslant 3$.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

5. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

Partie 2 : Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note :

- U_1 l'événement « on choisit l'urne U_1 ».
- U_2 l'événement « on choisit l'urne U_2 ».

6. Préciser l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y.

7. Montrer que pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$:

$$P_{U_1}(Y = j) = \frac{1}{N}.$$

8. Calculer $P_{U_2}(Y = j)$ pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$.
(On distinguera les cas $j = N$ et $1 \leqslant j \leqslant N - 1$).

9. Montrer que :

$$P(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1, N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$

10. Calculer l'espérance de Y.