Devoir surveillé 8 – Corrigé

Exercice 1

Partie 1

1. f est définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.
Soient $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $v=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda u+v) &= f(\underbrace{\lambda x+x'}_{X},\underbrace{\lambda y+y'}_{Y},\underbrace{\lambda z+z'}_{Z})\\
&= (X+Y-Z,\ 2Y,\ -X+Y+Z\\
&= \left(\lambda x+x'+\lambda y+y'-\lambda z-z'\ ,\ 2\lambda y+2y'\ ,\ -\lambda x-x'+\lambda y+y'+\lambda z+z'\right)\\
&= \lambda(x+y-z,\ 2y,\ -x+y+z)+(x'+y'-z',\ 2y',\ -x'+y'+z')\\
&= \lambda f(u)+f(v).
\end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire. On en déduit que c'est <u>un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.</u>

2. $f(e_1)=f(1,0,0)=(1,0,-1)$, $f(e_2)=f(0,1,0)=(1,2,1)$
et $f(e_3)=f(0,0,1)=(-1,0,1)$ donc $\boxed{A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}}$.

3. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
u\in\mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(u)=(0,0,0) &\Leftrightarrow \begin{cases}x+y-z=0\\2y=0\\-x+y+z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-z=0\\y=0\\-x+z=0\quad (L_3=L_1)\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x=z\\y=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow u=(z,0,z),\ z \text{ quelconque}\\
&\Leftrightarrow u=z\underbrace{(1,0,1)}_{u_1},\ z \text{ quelconque}\\
&\Leftrightarrow u\in\mathrm{Vect}(u_1).
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(u_1)$. Ainsi, (u_1) est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. De plus elle contient un seul vecteur et celui-ci est non nul, donc elle est libre.
Conclusion : $\boxed{\text{une base de } \mathrm{Ker}(f) \text{ est } (u_1) \text{ avec } u_1=(1,0,1).}$

4. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f))+\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathbb{R}^3)$. La question précédente donne $\dim(\mathrm{Ker}(f))=1$ et puisque $\dim(\mathbb{R}^3)=3$, on a : $\boxed{\mathrm{rg}(f)=2}$.

5. Puisque (e_1,e_2,e_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$, $(f(e_1),f(e_2),f(e_3))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Or (voir calculs question 2) $f(e_3)=(-1)\times f(e_1)+0\times f(e_2)$ est combinaison linéaire de $f(e_1)$ et $f(e_2)$ donc $(f(e_1),f(e_2))$ est aussi génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. De là, deux possibilités :

   - $(f(e_1),f(e_2))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et contient deux vecteurs avec $\dim(\mathrm{Im}(f))=2$, donc c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   - ou : pour $a,b\in\mathbb{R}$,

$$af(e_1)+bf(e_2)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\2b=0\\-a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=0.$$

   Donc $(f(e_1),f(e_2))$ est une famille libre et génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

   Remarque : on peut aussi montrer que $(f(e_1),f(e_2))$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$ et de bon cardinal, donc que c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   Conclusion : $\boxed{\text{une base de } \mathrm{Im}(f) \text{ est } (f(e_1),f(e_2)).}$

6. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
u\in\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) &\Leftrightarrow f(u)-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(u)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow f(u)-2u=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow (x+y-z,\ 2y,\ -x+y+z)-2(x,y,z)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}-x+y-z=0\\0=0\\-x+y-z=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow x=y-z,\quad y,\ z \text{ quelconques}\\
&\Leftrightarrow u=(y-z,y,z),\quad y,\ z \text{ quelconques}
\end{aligned}$$

$$u \in \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow u = y\underbrace{(1,1,0)}_{u_2}+z\underbrace{(-1,0,1)}_{u_3},\quad y,\ z \text{ quelconques}$$
$$\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}(u_2,u_3).$$

Donc $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(u_2,u_3)$. Ainsi, (u_2,u_3) est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. De plus, pour $a,b\in\mathbb{R}$:

$$au_2+bu_3=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=0.$$

Donc (u_2,u_3) est aussi libre. C'est une base de $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. On en déduit que $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}))=2}$.

Partie 2

7. (a) `A = np.array([ [1,1,-1] , [0,2,0] , [-1,1,1] ])`

   (b)
```python
B = A
for k in range(19):
    B = np.dot(A,B)
print(B)
```

8. Soient $B=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$PX=B \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=a\\ x=b\\ y+z=c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y+z=a-b\\ x=b\\ 2z=a-b+c \quad (L_3\leftarrow L_1+L_3)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac12 a+\frac12 b+\frac12 c\\ x=b\\ z=\frac12 a-\frac12 b+\frac12 c\end{cases} \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} b\\ -\frac12 a+\frac12 b+\frac12 c\\ \frac12 a-\frac12 b+\frac12 c\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -\frac12 & \frac12 & \frac12\\ \frac12 & -\frac12 & \frac12\end{pmatrix}B$$

Pour tout $B\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $PX=B$ a une unique solution donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et le calcul précédent montre que $\boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -\frac12 & \frac12 & \frac12\\ \frac12 & -\frac12 & \frac12\end{pmatrix}}$.

9. On pose le calcul. $PD=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$ puis $PDP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}=A$.

10. D est diagonale, son rang est égal au nombre de coefficients diagonaux non nuls donc $\boxed{\mathrm{rg}(D)=2}$.
    Autre démonstration : Par définition,
    $\mathrm{rg}(D)=\dim\Big(\mathrm{Vect}\big((2,0,0),(0,2,0),(0,0,0)\big)\Big)=\dim\Big(\mathrm{Vect}\big((2,0,0),(0,2,0)\big)\Big)$.
    Or $(2,0,0),(0,2,0)$ ne sont pas colinéaires. Donc $((2,0,0),(0,2,0))$ est libre et génératrice de $\mathrm{Vect}\big((2,0,0),(0,2,0)\big)$ donc ça en est une base. Ainsi, $\mathrm{rg}(D)=2$.

11. Initialisation : $PD^0P^{-1}=PI_3P^{-1}=PP^{-1}=I_3=A^0$, donc la propriété $A^n=PD^nP^{-1}$ est vraie pour $n=0$.
    Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $A^n=PD^nP^{-1}$.
    $$A^{n+1}=A^nA=PD^n\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}DP^{-1}=PD^nDP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}.$$
    Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=PD^nP^{-1}$.

12. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D est diagonale donc $D^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 0^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
    Remarque : si $n=0$, $0^n=1$.
    On peut alors calculer le produit $A^n=PD^nP^{-1}$.
    On peut aussi remarquer que $D^n=2^{n-1}D$ donc $A^n=2^{n-1}PDP^{-1}=2^{n-1}A$. On trouve alors
    $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad A^n=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & -2^{n-1}\\ 0 & 2^n & 0\\ -2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1}\end{pmatrix}}.$$
    Remarque : $2^n-2^{n-1}=2^{n-1}(2-1)=2^{n-1}$.

Exercice 2

Partie 1 : Étude de la fonction f

1. Par somme, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
   Pour $x > 0$, $f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$ et, par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   Par différence de fonctions usuelles, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$,
   $$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$
   Ceci est du signe de $x - 1$. On obtient le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. - f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle y est dérivable.
   - Sur l'intervalle $]0,1[$, f est strictement décroissante (car $f'(x) < 0$ sur cet intervalle) et 2 appartient à l'intervalle $\left]\lim_{x\to1^-} f(x), \lim_{x\to0^+} f(x)\right[=]1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution a sur $]0,1[$.
   - De même, sur $]1,+\infty[$, f est strictement croissante et 2 appartient à l'intervalle $\left]\lim_{x\to1^-} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]1,+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution b sur $]1,+\infty[$.
   - Enfin, $x = 1$ n'est pas solution de $f(x) = 2$.

   $\boxed{\text{L'équation } f(x) = 2 \text{ a donc exactement deux solutions } a \text{ et } b \text{ et } 0 < a < 1 < b.}$

3. - $f(2) = 2 - \ln(2) \approx 1,3 < 2$ et $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - \ln(2^2) = 4 - 2\ln(2) \approx 2,6 > 2$ donc $f(2) < f(b) < f(4)$ et comme f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$, $2 < b < 4$. On a bien $\boxed{b \in [2,4]}$.
   - De plus, $f(b) = 2$ donc $b - \ln(b) = 2$ donc $\boxed{\ln(b) = b - 2.}$

Partie 2 : Étude d'une suite

4. Initialisation : $u_0 = 4$ existe bien et comme $b \leqslant 4$, $u_0 \in [b,+\infty[$.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $u_n \in [b,+\infty[$. Alors $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ existe. De plus, $u_n \geqslant b$ donc par croissance de la fonction ln,
   $$\ln(u_n) \geqslant \ln(b) \text{ donc } u_{n+1} \geqslant \ln(b) + 2 = b$$
   en utilisant la question 3. Donc $u_{n+1} \in [b,+\infty[$.
   Conclusion : par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \in [b,+\infty[.}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \ln(u_n) + 2 - u_n = 2 - f(u_n)$. Par croissance de f sur $]1,+\infty[$, $u_n \geqslant b$ implique $f(u_n) \geqslant f(b) = 2$. Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$: $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

6. - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par b donc elle converge vers un réel ℓ.
   - De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant b$ donc par passage à la limite, $\ell \geqslant b > 0$.
   - On a aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$, $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell)$ par continuité de ln en $\ell > 0$. Donc, par passage à la limite,
   $$\ell = \ln(\ell) = 2 \text{ donc } \ell - \ln(\ell) = 2 \text{ donc } f(\ell) = 2.$$

   Or, l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution sur $[b,+\infty[$ qui est b donc $\ell = b$.
   Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } b.}$

7. (a) Soit $g : x \mapsto \ln(x) + 2$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Pour $x \geqslant b \geqslant 2$, $g'(x) = \frac{1}{x}$ donc $0 \leqslant g'(x) \leqslant \frac{1}{2}$, donc $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à g sur l'intervalle $[b,+\infty[$, pour tout $x \geqslant b$,
   $$|g(x) - g(b)| \leqslant \frac{1}{2}|x - b|.$$
   En particulier, avec $x = u_n \geqslant b$, on a $g(u_n) = u_{n+1}$, $g(b) = \ln(b) + 2 = b$ donc, sachant que $u_n - b \geqslant 0$ et $u_{n+1} - b \geqslant 0$,
   $$\boxed{u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b).}$$

   (b) - On sait déjà que $0 \leqslant u_n - b$ d'après la question 4.

- On démontre le reste par récurrence.
  Initialisation : $u_0 = 4$ et $b \geqslant 2$ donc $u_0 - b \leqslant 2 = \frac{1}{2^{-1}}$.
  Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.
  $$u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b) \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$
  Conclusion : par récurrence, $u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a donc montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.}$

8. (a)
```python
import numpy as np
def suite(n):
    u = 4
    for k in range(n):
        u = np.log(u)+2
    return u
```

(b)
```python
def valeur_approchee(epsilon) :
    n = 0
    while 1/(2**(n-1)) > epsilon :
        n = n+1
    return suite(n)
```

Partie 3 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :
$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt.$$

9. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'y annule par car $f(t) \geqslant 1$ pour tout $t > 0$ (d'après la question 1) donc $\boxed{t \mapsto \frac{1}{f(t)} \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$

10. $\boxed{\Phi(x) = \Big[H(t)\Big]_x^{2x} = H(2x) - H(x)}$.

11. En tant que primitive, H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Par composée et différence, Φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 0$,
$$\begin{aligned}\Phi'(x) = 2H'(2x) - H'(x) = 2\frac{1}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} &= \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)} \\ &= \frac{2(x - \ln(x)) - (2x - \ln(2x))}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \\ &= \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}\end{aligned}$$
car $\ln(2x) = \ln(2) + \ln(x)$.

12. Pour $x > 0$, $x - \ln(x) = f(x) > 0$, $2x - \ln(2x) = f(2x) > 0$ et
$$\ln(2) - \ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant \ln(2) \Leftrightarrow x \leqslant 2.$$
Donc

x	0		2		$+\infty$
$\Phi'(x)$	||	$+$	0	$-$	

$\boxed{\Phi \text{ est croissante sur }]0, 2] \text{ et décroissante sur } [2, +\infty[.}$

13. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \leqslant 2x$ (les bornes de l'intégrales sont dans le bon ordre) et pour tout $t \in [x, 2x]$, $f(t) \geqslant 1$ donc $0 \leqslant \frac{1}{f(t)} \leqslant 1$. Par croissance de l'intégrale,
$$\int_x^{2x} 0\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} 1\,\mathrm{d}t \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant 2x - x$$
Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x.}$

14. D'après l'encadrement précédent et le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to 0^+} \Phi(x) = 0 \in \mathbb{R}$. Donc $\boxed{\Phi \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } \Phi(0) = 0.}$

Exercice 3

Partie 1 : Une première expérience aléatoire

1. Il faut au minimum 1 tirage pour obtenir la boule noire et au maximum N tirages. $\boxed{X(\Omega) = [\![1, N]\!]}$.

2. (a)
```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

N = int(input('Donner un entier naturel non nul : '))
Liste = []
for k in range(10000):
    i = 1  # nombre de tirages
    M = N  # nombre de boules dans l'urne
    while rd.randint(1,M+1) > 1 :
        i = i+1
        M = M-1
    Liste.append(i)

Abscisse = np.linspace(0.5, N+0.5, N+1)
plt.title('Histogramme')
plt.hist(Liste, Abscisse, density=True, edgecolor='k')
plt.show()
```
Ici, on considère que les boules sont numérotées (avant chaque tirage) de 1 à M et que la boule noire est la numéro 1 (donc les blanches sont > 1). Il y a d'autres possibilités de numérotation.

   (b) On conjecture que X suit une loi uniforme sur $[\![1, 5]\!]$ quand $N = 5$ et on peut conjecturer que X suit une loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$ en général.

3. L'urne contient au départ 5 boules, 1 noires et 4 blanches. $P(X = 1) = P(N_1) = \dfrac{1}{5}$ et en utilisant la formule des probabilités composées :
$P(X = 2) = P(B_1 \cap N_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(N_2) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}$,
$P(X = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(N_3) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{5}$.
$$\boxed{P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{1}{5}.}$$

4. Soit $k \in X(\Omega) = [\![1, N]\!]$. D'après la formule des probabilités composées,
$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k) \\ &= P(B_1)P_{B_1}(B_2)\dots P_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})P_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k) \\ &= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \cdots \times \frac{N-k+1}{N-k+2} \times \frac{1}{N-k+1} \\ &= \frac{1}{N} \end{aligned}$$
Donc $\boxed{X \text{ suit la loi uniforme sur } [\![1, N]\!].}$

5. $E(X) = \dfrac{N+1}{2}$ donc $\boxed{\text{il faut en moyenne } \dfrac{N+1}{2} \text{ tirages pour obtenir la boule noire.}}$

Partie 2 : Une deuxième expérience aléatoire

6. On connaît l'urne quand on tombe sur la noire (urne 1) ou alors si l'urne ne contenait que des boules blanches (urne 2). Il faut donc au minimum 1 tirage et au maximum N tirages. $\boxed{Y(\Omega) = [\![1, N]\!]}$.

7. Si U_1 est réalisé, Y est égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire, donc $\boxed{\text{pour } j \in [\![1, N]\!],\ P_{U_1}(Y = j) = P(X = j) = \dfrac{1}{N}.}$

8. Si U_2 est réalisé, il faut vider l'urne pour voir qu'elle ne contenait que des boules blanches, donc Y vaut toujours N.
$$\boxed{P_{U_2}(Y = N) = 1 \text{ et pour } j \in [\![1, N-1]\!],\ P_{U_2}(Y = j) = 0.}$$

9. (U_1, U_2) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,
$$P(Y = j) = P(U_1)P_{U_1}(Y = j) + P(U_2)P_{U_2}(Y = j) = \frac{1}{2}P_{U_1}(Y = j) + \frac{1}{2}P_{U_2}(Y = j)$$
$\boxed{\text{Si } j \in [\![1, N-1]\!],\ P(Y = j) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{2} \times 0 = \dfrac{1}{2N}}$
et $\boxed{\text{si } j = N,\ P(Y = j) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2N} + \dfrac{1}{2}.}$

10. $E(Y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} jP(Y = j) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{j}{2N} + N\left(\frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2N}\frac{N(N-1)}{2} + \frac{1}{2} + \frac{N}{2}$.
Donc $\boxed{E(Y) = \dfrac{3N+1}{4}}$.