Devoir surveillé 4

Mercredi 13 janvier 2021 - 4h

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on note n un entier supérieur ou égal à 1. On suppose que dans une certaine région, pendant une période donnée, seuls deux états météo sont possibles : le beau temps et le mauvais temps.
L'étude des bulletins météo du passé laisse penser que le temps qu'il fait un certain jour de cette période dépend du temps qu'il a fait la veille de la façon suivante :

- s'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égal à $\dfrac{4}{5}$;
- s'il fait mauvais un jour donné, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est égal à $\dfrac{2}{5}$.

On s'intéresse à une période débutant le jour 1, jour au cours duquel il a fait beau.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

- B_n l'événement : « il fait beau le jour n » ;
- $\overline{B}_n$ l'événement : « il fait mauvais le jour n » ;
- $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P\left(\overline{B}_n\right)$.

1. (a) Donner, sans justifier, la valeur de b_1 et c_1.
   (b) Déterminer, en justifiant cette fois, b_2 et c_2.
2. (a) Établir la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{n+1} = \dfrac{1}{5}b_n + \dfrac{3}{5}$.
   (b) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de b_n en fonction de n.
   (c) En déduire l'expression de c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et interpréter ce résultat.
3. (a) Soit U_n l'événement « il fait beau pendant les n premiers jours de la période considérée ». Calculer $P(U_n)$.
   (b) Soit V_n l'événement « il fait beau au moins deux fois lors des n premiers jours de la période considérée ». Calculer $P(V_n)$.
   (c) On suppose qu'il fait beau le jour n. Quelle est la probabilité qu'il ait fait beau le jour précédent ?
4. Notons $K = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la matrice à une ligne et deux colonnes suivante : $X_n = \begin{pmatrix} b_n & c_n \end{pmatrix}$.
   (a) Donner X_1 et démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_{n+1} = X_n K$.
   H.P. (b) Écrire une fonction Scilab **MatriceX(n)** qui, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, renvoie la matrice X_n calculée à partir de X_1 et de la relation de récurrence 4.(a).
   (c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$X_{n+1} = X_1 K^n.$$
   (d) Déterminer alors l'expression (sous forme d'un tableau) de la matrice K^n en fonction de n.

(b) Écrire une fonction python qui, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, renvoie la liste $[b_n, c_n]$.

Exercice 2

Partie I

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}.$$

1. Recopier et compléter les lignes 5 à 9 incomplètes du script ~~Scilab~~ python ci-dessous pour qu'il crée la liste $L = [u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n]$ pour n entier naturel entré par l'utilisateur :

```
1   n = int(input('entrer un entier n'  : ) )
2   u = 0
3   v = 1
4   L = [u, v]
5   for k   .........
6        w = .........
7        u = .........
8        v = .........
9        ... .........
10  print(L)
11
```

2. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique de raison 8. En déduire l'expression de s_n en fonction de n.

3. On pose pour tout entier naturel n : $\quad v_n = (-1)^n u_n \quad$ et $\quad t_n = v_n - v_{n+1}$

   (a) Exprimer t_n en fonction de s_n pour tout entier naturel n.

   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, on a $t_n = (-8)^n$.

4. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i$.

   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 8^n}{9}$$

Partie II

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5. Montrer que $M^2 - 7M - 8I = 0_3$.

6. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de M et de I.

7. (a) On pose : $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Vérifier que : $M^0 = a_0M + b_0I$.

   (b) Déterminer deux réels a_1 et b_1 tels que : $M^1 = a_1M + b_1I$.

   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M^n = u_nM + 8u_{n-1}I$$

   où (u_n) est la suite définie dans la Partie I.

   (d) En déduire, sous la forme d'une matrice, l'expression de M^n.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \quad \text{et} \quad f(0) = -1.$$

ainsi que la fonction φ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$.

Partie I - Étude de f

H.P 1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

H.P 2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.

3. Déterminer les variations de f *puis* dresser son tableau de variation complet.

4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.
On note $g : J \to \mathbb{R}_+$ la réciproque associée.

H.P 5. (a) Dresser le tableau de variation complet de g.
(b) Justifier que g est dérivable sur $J \setminus \{-1\}$.
(c) Montrer que g est aussi dérivable en -1, en étudiant un taux d'accroissement. On précisera $g'(-1)$.

Partie II - Étude d'une suite implicite

H.P

6. Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que $f(x_k) = k$.

7. Exprimer x_k à l'aide de g puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.

8. Donner la valeur de x_0 et justifier que $x_1 \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$. On pourra utiliser : $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) > \dfrac{1}{4}$.

Partie III - Étude d'une suite récurrente

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$

9. Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

10. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

11. En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2}; 2\right], \quad |\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{9}$.

12. Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$, d'inconnue $x > 0$, sont équivalentes. En déduire les solutions de l'équation $x = \varphi(x)$.

H.P. 13. Montrer que pour tout entier n : $|u_{n+1} - x_1| \leqslant \dfrac{2}{9}|u_n - x_1|$. résultat à admettre

14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_1| \leqslant \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

15. On cherche une valeur approchée à 10^{-3} près de x_1. Celle-ci sera donnée par un terme u_n tel que $|u_n - x_1| \leqslant 10^{-3}$. Écrire un programme ~~Scilab~~ python qui détermine un tel u_n.