# Devoir surveillé 4 – Corrigé

## Exercice 1

1. (a) $b_1 = 1$ et $c_1 = 0$

   (b) Puisqu'il fait beau le jour 1, le jour 2 suivant, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égal à $\frac{4}{5}$. Donc
$$b_2 = P(B_2) = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad c_2 = 1 - P(B_2) = \frac{1}{5}.$$

2. (a) $(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales
$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\overline{B_n})P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) \\ &= b_n \times \frac{4}{5} + (1 - b_n) \times \left(1 - \frac{2}{5}\right) \\ &= \frac{1}{5}b_n + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

   (b) $(b_n)$ est une suiste arithmético-géométrique.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. $x = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.
   Posons $u_n = b_n - \frac{3}{4}$. Alors
$$u_{n+1} = b_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}b_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}\left(u_n + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{30} = \frac{1}{5}u_n.$$
   Donc $(u_n)$ est gémétrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = b_1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$u_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$
   Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

   (c)
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = P(\overline{B_n}) = 1 - P(B_n) = 1 - b_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

   (d) $-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \frac{3}{4}$. Après un grand nombre de jours, la probabilité qu'il fasse beau un jour donné est proche de $\frac{3}{4}$.

3. (a) $U_n = B_1 \cap B_1 \cap \cdots \cap B_n$. D'après la formule des probabilités composées
$$P(U_n) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) \times \cdots \times P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(B_n) = 1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}.$$

   (b) Comme le jour 1 est forcément beau, $\overline{V_n}$ : « il faut beau uniquement le premier jour ». Donc $\overline{V_n} = B_1 \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_n}$. Toujours d'après la formule des probabilités composées
$$P(\overline{V_n}) = P(B_1)P_{B_1}(\overline{B_2}) \times \cdots \times P_{B_1 \cap \overline{B_2} \cdots \cap \overline{B_{n-1}}}(\overline{B_n}) = 1 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}.$$
   Ainsi,
$$P(V_n) = 1 - \frac{1}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}.$$

   (c) On cherche $P_{B_n}(B_{n-1})$. D'après la formule de Bayes
$$P_{B_n}(B_{n-1}) = \frac{P(B_{n-1})P_{B_{n-1}}(B_n)}{P(B_n)} = \frac{b_{n-1} \times \frac{4}{5}}{b_n} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}$$

4. (a) $X_1 = (b_1 \quad c_1) = (1 \quad 0)$.
   $X_nK = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}b_n + \frac{3}{5}c_n & \frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}c_n \end{pmatrix}$.
   Or,
$$\frac{4}{5}b_n + \frac{3}{5}c_n = \frac{4}{5}b_n + \frac{3}{5}(1 - b_n) = \frac{1}{5}b_n + \frac{3}{5} = b_{n+1}$$

et

$$\frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}c_n = \frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}(1-b_n) = -\frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5} = 1 - b_{n+1} = c_{n+1}$$

Donc

$$X_nK = (b_{n+1} \quad c_{n+1}) = X_{n+1}$$

(b)

```
function X =  MatriceX(n)
    K = 1/5 * [4,1 ; 3,2]
    X = [1,0]
    for k = 2:n
        X = X*K
    end
endfunction
```

version python

```
def suite(n) :
    b = 3/4 + 1/4 *(1/5)**(n+1)
    c = 1 - b
    return [b,c]
```

(c) Initialisation : $X_1K^0 = X_1I_2 = X_1 = X_{0+1}$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_{n+1} = X_1K^n$.

$$X_{n+2} = X_{n+1}K = X_1K^nK = X_1K^{n+1}.$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence $X_{n+1} = X_1K^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Notons $K^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} X_{n+1} = X_1K^n &\Leftrightarrow (b_{n+1} \quad c_{n+1}) = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (b_{n+1} \quad c_{n+1}) = (a \quad b) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b_{n+1} \\ b = c_{n+1} \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc

$$a = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

On a aussi $X_{n+2} = X_1K^{n+1} = X_1KK^n = X_2K^n$.

$$\begin{aligned} X_{n+2} = X_2K^n &\Leftrightarrow (b_{n+2} \quad c_{n+2}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b_{n+2} = \frac{4}{5}a + \frac{1}{5}c \\ c_{n+2} = \frac{4}{5}b + \frac{1}{5}d \end{cases}. \end{aligned}$$

En utilisant les valeurs de $a$ et $b$ déjà trouvées, on obtient

$$c = \frac{3}{20} - \frac{3}{20} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad \text{et} \quad d = \frac{1}{20} + \frac{3}{20} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Donc

$$K^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \\ \frac{3}{20} - \frac{3}{20} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n & \frac{1}{20} + \frac{3}{20} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \end{pmatrix}$$

## Exercice 2

1. Version python

```
n = int(input('entrer un entier n'  : ))
u = 0
v = 1
L = [u, v]
for k in range (0, n-1) :
    w = 7 * v + 8 * u
    u = v
    v = w
    L.append (v)

print(L)
```

2. $s_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = 7u_{n+1} + 8u_n + u_{n+1} = 8(u_{n+1} + u_n) = 8s_n$ Donc $(s_n)$ est géométrique de raison 8 et de premier terme $s_0 = u_1 + u_0 = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = 8^n.$$

3. (a) $t_n = (-1)^n u_n - (-1)^{n+1} u_{n+1} = (-1)^n (u_n - (-1)u_{n+1}) = (-1)^n s_n$.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = (-1)^n s_n = (-1)^n 8^n = (-8)^n$.

4. Soit $n$ un entier naturel non nul.
   (a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i = \frac{1-(-8)^n}{1-(-8)} = \frac{1-(-8)^n}{9}$
   (b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i = \sum_{i=0}^{n-1} t_i \sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = v_0 - v_n$ par télescopage.
   Donc
   $$v_n = v_0 - \sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i = (-1)^0 u_0 - \frac{1-(-8)^n}{9} = \frac{(-1)+(-1)^n 8^n}{9}$$
   Or $u_n = (-1)^n v_n$ car $\dfrac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$. Donc
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^{n+1} + (-1)^{2n} 8^n}{9} = \frac{(-1)^{n+1} + 8^n}{9}$$

5. $M^2 = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}$ Donc
$$M^2 - 7M - 8I = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 21 & 21 \\ 21 & 14 & 21 \\ 21 & 21 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 0_3$$

6.
$$\begin{aligned} M^2 - 7M - 8I = 0_3 \ \text{ donc } \ & M^2 - 7M = 8I \\ \text{donc } \ & \frac{1}{8}M^2 - \frac{7}{8}M = I \\ \text{donc } \ & M\left(\frac{1}{8}M - \frac{7}{8}I\right) = I. \end{aligned}$$
   On en déduit que $M$ est inversible et que $M^{-1} = \dfrac{1}{8}M - \dfrac{7}{8}I$.

7. (a) $a_0 M + b_0 I = I = M^0$.
   (b) $M^1 = M = 1 \times M + 0 \times I = a_1 M + b_1 I$ en posant $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.
   (c) Initialisation : $u_1 M + 8u_0 I = M = M^1$.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^n = u_n M + 8u_{n-1} I$.
   $$M^{n+1} = M^n M = (u_n M + 8u_{n-1} I)M = u_n M^2 + 8u_{n-1} M.$$
   Or $M^2 = 7M + 8I$ donc
   $$M^{n+1} = u_n(7M+8I) + 8u_{n-1}M = (7u_n + 8u_{n-1})M + 8u_n I = u_{n+1}M + 8u_n I.$$
   Conclusion : d'après le principe de récurrence, $M^n = u_n M + 8u_{n-1} I$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (d)
   $$M^n = \frac{-(-1)^n + 8^n}{9}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \frac{8 \times (-1)^n + 8^n}{9}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   $$M^n = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 \times (-1)^n + 3 \times 8^n & -3 \times (-1)^n + 3 \times 8^n & -3 \times (-1)^n + 3 \times 8^n \\ -3 \times (-1)^n + 3 \times 8^n & 7 \times (-1)^n + 3 \times 8^n & -3 \times (-1)^n + 3 \times 8^n \\ -3 \times (-1)^n + 3 \times 8^n & -3 \times (-1)^n + 3 \times 8^n & 7 \times (-1)^n + 3 \times 8^n \end{pmatrix}$$

## Exercice 3

1. La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions continues.
   De plus , par croissance comparée, $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$ donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1 = f(0)$.
   Par conséquent, $f$ est également continue en 0.
   Donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.
   Soit $x > 0$. On a : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = x - \ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty \notin \mathbb{R}$. La fonction $f$ n'est donc pas dérivable en 0. Cependant, $C_f$ admet une tangente verticale en 0.

3. Soit $x > 0$. $f'(x) = 2x - \ln(x) - 1$. Le signe n'est pas évident. Étudions $f'$. La fonction $f'$ est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est donnée par
   $$\forall x > 0, \quad f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}.$$
   Puisque $x > 0$, $f''(x)$ est du signe de $2x - 1$, c'est-à-dire

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi, $f'$ est décroissante sur $]0, \frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$. Elle admet un minimum qui vaut $f'(\frac{1}{2}) = \ln(2) > 0$. Donc pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$. On en déduit que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Étant continue en 0, on peut dire que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

En $+\infty$ : pour $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée.

On en déduit le tableau de variation de $f$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f$ | $-1$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

4. $f$ est continue (question1) et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $J = \left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[ = [-1, +\infty[$.

5. (a) Le théorème de la bijection précise aussi que la réciproque $g : J \to \mathbb{R}_+$ est alors continue et de même monotonie que $f$, donc $g$ est strictement croissante sur $J$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
De plus $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$ donc $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = 0$.

| $x$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g$ | $0$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

(b) On sait que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in ]-1, +\infty[$. Notons $y = g(x) \in \mathbb{R}_+^*$. On a $f'(y) > 0$ d'après la question 3. Donc $f'(y) \neq 0$. On en déduit que $g$ est dérivable en $x$. Ainsi, $g$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$.

(c) Soit $x \in J \setminus \{-1\}$. Notons toujours $y = g(x) \underset{x\to-1}{\longrightarrow} 0$ (on a aussi $x = f(y)$).

$$\frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = \frac{y - 0}{f(y) + 1} = \frac{y}{y^2 - y\ln(y)} = \frac{1}{y - \ln(y)} \underset{y\to0}{\longrightarrow} 0 \in \mathbb{R}$$

Donc $g$ est dérivable en $-1$ et $g'(-1) = 0$.

6. Pour tout entier naturel $k$, $k$ appartient à $J$ et $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $J$ donc il existe un unique réel $x_k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $f(x_k) = k$.

7. On a $f(x_k) = k$, donc $x_k = g(k)$ par définition de $g$.
On a : $x_{k+1} - x_k = g(k+1) - g(k) \geqslant 0$ car $g$ est croissante sur $J = [-1, +\infty[$. Ainsi, la suite $(x_k)$ est croissante. De plus, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = \lim\limits_{k\to+\infty} g(k) = +\infty$ d'après la limite donnée à la question 5(a).

8. Par définition,$x_0$ est l'unique solution (strictement positive) de $f(x) = 0$ .Or $f(1) = 0$ donc $x_0 = 1$.

$x_1$ vérifie $f(x_1) = 1$. Or, $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) < \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{8} < 1$ (en utilisant l'indication) et $f(2) = 3 - 2\ln(2) > 3 - 2 = 1$ car $\ln(2) < \ln(\mathrm{e}) = 1$. On a donc : $f\left(\dfrac{3}{2}\right) \leqslant f(x_1) \leqslant f(2)$ et par stricte croissance de $f$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\dfrac{3}{2} \leqslant x_1 \leqslant 2$.

9. La fonction $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2 + x}{x^2}$ . Puisque $x^2 > 0$, $\varphi'(x)$ est du signe de $-2 + x$, c'est-à-dire :

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi, $\varphi$ est décroissante sur $]0, 2]$ et croissante sur $[2, +\infty[$.

10. Montrons par une récurence que :$\forall n \in \mathbb{N}$ ,$\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

- $u_0 = \dfrac{3}{2}$ donc la relation est vraie pour $n = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$. On a, par décroissance de $\varphi$ sur $]0,2]$, $\varphi(2) \leqslant \varphi(u_n) \leqslant \varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) \leqslant \varphi(1)$. Or $\varphi(2) = 1+\ln(2) = 1+\dfrac{1}{2}\ln(4) > 1+\dfrac{1}{2}\ln(\mathrm{e}) = \dfrac{3}{2}$ et $\varphi(1)=2$. Donc $\dfrac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. Donc la propriété est héréditaire.
- D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}\ , \frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

11. Soit $x > 0$. $\varphi'(x) = \dfrac{-2+x}{x^2}$. $\varphi'$ est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son ensemble de définition, à savoir $\mathbb{R}_+^*$. On a : $\varphi''(x) = \dfrac{4-x}{x^3}$, qui est du signe de $4-x$ (car $x^3 > 0$), c'est-à-dire

| $x$ | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi''(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |

Ainsi, $\varphi'$ est croissante sur $]0,4]$ et décroissante sur $[4,+\infty[$.

Soit $x \in \left[\dfrac{3}{2},2\right]$. Puisque $\varphi$ est croissante sur $]0,4]$, on a : $\varphi'\left(\dfrac{3}{2}\right) \leqslant \varphi'(x) \leqslant \varphi'(2)$.

Or $\varphi'\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{2}{9}$ et $\varphi'(2) = 0$, donc $-\dfrac{2}{9} \leqslant \varphi'(x) \leqslant 0 \leqslant \dfrac{2}{9}$. Ainsi, $|\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{9}$.

12. Soit $x > 0$. On a : $x = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{x} + \ln x \Leftrightarrow x^2 = 2 + x\ln x \Leftrightarrow f(x) = 1$.
Or le réel $x_1$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = 1$, donc
$x_1$ est aussi l'unique solution de l'équation : $x = \varphi(x)$.

13. $\varphi$ est continue sur $\left[\frac{3}{2},2\right]$ et dérivable sur $\left]\frac{3}{2},2\right[$. Pour tout $x \in \left]\frac{3}{2},2\right[$, $|\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{9}$.
Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x,y \in \left[\frac{3}{2},2\right]$, on a :
$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant \frac{2}{9}|x-y|.$$
Prenons alors $x = u_n$ et $y = x_1$, qui sont bien dans $\left[\frac{3}{2},2\right]$ d'après les questions 8 et 11. On a : $\varphi(u_n) = u_{n+1}$ et $\varphi(x_1) = x_1$ (d'après la question 13), ce qui donne :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}-x_1| \leqslant \frac{2}{9}|u_n - x_1|$$

14. Montrons par récurence sur l'entier $n$ que $|u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

- $|u_0 - x_1| = \left|\dfrac{3}{2} - x_1\right|$ or $x_1 \in \left[\dfrac{3}{2};2\right]$ d'après la question 8.
On a donc $|u_0 - x_1| = x_1 - \dfrac{3}{2} \leqslant 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} \leqslant 1 = \left(\frac{2}{9}\right)^0$. La propriété est vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n$, alors $|u_{n+1} - x_1| \leqslant \dfrac{2}{9}|u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}$. La propriété est donc héréditaire.
- En vertu du principe de récurrence, $|u_n - x_1| \leq \left(\dfrac{2}{9}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n = 0$ car $\dfrac{2}{9} \in ]-1,1[$. D'après le corollaire du théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n - x_1) = 0$, soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = x_1$.

15.
```
import numpy as np
n=0
u=3/2
while (2/9)**n > 10**(-3) :
    n=n+1
    u=2/u +np.log(u)
print(n)
```