DEVOIR SURVEILLÉ 4

Mercredi 12 décembre 2021 – 4h
Calculatrices et documents interdits.
Soignez la présentation, encadrez vos résultats et conclusions.

Exercice 1

Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = (x^3 + 4x^2 + 5x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans un repère du plan.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$.
   Trouver une racine de f puis une factorisation (maximale) de $f(x)$ dans $\mathbb{R}[x]$.
3. En déduire les variations de g. On dressera le tableau de variation complet de g.
4. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -2.

Exercice 2

Partie I : préliminaires

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 + x^2) - x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0, 1]$, en justifiant précisément.
5. Justifier pour tout réel $x \geqslant 0$, l'inégalité : $\ln(1 + x) \leqslant x$.

Partie II : étude d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln\left(1 + (u_n)^2\right)$.

6. Écrire un programme python qui affiche la liste $L = [u_0, u_1, \ldots, u_{100}]$.
7. Établir pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement suivant : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
8. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
9. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
10. Écrire un programme python qui détermine le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 10^{-4}$.
11. (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leqslant u_n^2$.
    (b) En déduire pour tout entier $n \geqslant 1$, l'inégalité $u_n \leqslant (\ln(2))^n$.
    (c) Établir pour tout entier $n \geqslant 2$, l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \frac{1 - (\ln(2))^n}{1 - \ln(2)}$.

Problème

Partie I : calcul matriciel

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et préciser la matrice P^{-1}, puis exprimer P^{-1} en fonction de Q.
2. Montrer que $D = \dfrac{1}{6}\, QMP$ est une matrice diagonale que l'on calculera.
3. Exprimer M en fonction de D, Q et P puis montrer que M est inversible et exprimer M^{-1} à l'aide de Q et P.
4. Déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Établir que pour tout entier naturel n, on a :
$$M^n = \frac{1}{6} P D^n Q$$
6. Justifier que la première colonne de la matrice M^n est :
$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}.$$

Partie II : étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon

Les trois sports du triathlon sont : la natation, le cyclisme et la course à pied.
Un athlète décide de pratiquer un sport par jour pour s'entraîner au triathlon. Il commence son entraînement par la natation, au jour 0.
Son entraînement obéit ensuite aux règles suivantes (valables pour tout entier naturel n) :

- si l'athlète a pratiqué la natation le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - la natation avec probabilité $1/5$
  - le cyclisme avec probabilité $1/5$
  - la course à pied avec probabilité $3/5$
- si l'athlète a pratiqué le cyclisme le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - la natation avec probabilité $2/5$
  - le cyclisme avec probabilité $3/5$
- si l'athlète a pratiqué la course à pied le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - le cyclisme avec probabilité $1/5$
  - la course à pied avec probabilité $4/5$

Pour tout entier naturel n, on désigne par :

- A_n l'évènement « l'athlète s'entraîne à la natation le jour n » et par a_n la probabilité de A_n.
- B_n l'évènement « l'athlète s'entraîne au cyclisme le jour n » et par b_n la probabilité de B_n.
- C_n l'évènement « l'athlète s'entraîne à la course à pied le jour n » et par c_n la probabilité de C_n.

7. Déterminer a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1.

8. Calculer la probabilité pour qu'il enchaîne natation - course à pied - cyclisme - natation (dans cet ordre) les 4 premiers jours.

9. On suppose, pour cette question seulement, que l'athlète a fait du cyclisme le jour numéro 2. Quelle est la probabilité qu'il ait fait de la natation le jour numéro 1 ?

10. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que pour tout entier naturel n on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n.$$

    Déterminer de même les probabilités b_{n+1} et c_{n+1} en fonction des probabilités a_n, b_n et c_n. *On attend une justification précise.*

11. **Parenthèse informatique**. Écrire une fonction python `Probas(n)` qui, étant donné $n \in \mathbb{N}$, renvoie la liste $[a_n, b_n, c_n]$.

12. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

    et exprimer A en fonction de la matrice M de la partie I.

13. En déduire alors l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

14. Déterminer les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.