# Devoir surveillé 4 – Corrigé

## Exercice 1

Soit $g$ la fonction définie pour tout réel $x$ par $g(x) = (x^3+4x^2+5x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $g$ dans un repère du plan.

1. Soit $x > 0$.

$$g(x) = \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} + 4\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} + 5\frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{2}{\mathrm{e}^x}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$

Soit $x < 0$.

$$g(x) = x^3\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-x}$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$.
Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.}$

2. $f(-1) = (-1)^3+(-1)^2-3(-1)-3 = -1+1+3-3 = 0$, donc $\boxed{-1 \text{ est racine de } f.}$
On en déduit que, pour tout réel $x$, $x+1$ divise $f(x)$. Posons la division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-3x-3 & x+1 \\ \cline{2-2} -(x^3+x^2) & x^2-3 \\ \cline{1-1} -3x-3 & \\ -(-3x-3) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Ainsi, $f(x) = (x+1)(x^2-3)$ et donc $\boxed{f(x) = (x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}).}$

3. $x \mapsto x^3+4x^2+5x+2$ est polynomiale donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par produit, $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (3x^2+8x+5)\,\mathrm{e}^{-x} + (x^3+4x^2+5x+2)(-e^{-x}) \\ &= (3x^2+8x+5-x^3-4x^2-5x-2)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-x^3-x^2+3x+3)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= -f(x)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= -(x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Le signe de $g'(x)$ est donné par le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-(x+1) = -x-1$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = x^2-3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\mathrm{e}^{-x}$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

De plus $g(\sqrt{3}) = (8\sqrt{3}+14)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{3}}$, $g(-\sqrt{3}) = (-8\sqrt{3}+14)\,\mathrm{e}^{\sqrt{3}}$ et $g(-1) = 0$.
On en déduit le tableau de variation de $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $g(-\sqrt{3})$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $g(\sqrt{3})$ | $\searrow$ | $0$ |

4. $g(-2) = 0$ et $g'(-2) = \mathrm{e}^2$ donc l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $-2$ est $y = \mathrm{e}^2(x+2)+0$ c'est-à-dire $\boxed{y = \mathrm{e}^2 x + 2\,\mathrm{e}^2.}$

# Exercice 2

## Partie I : préliminaires

1. La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1+x^2$ sont polynomiales donc définies sur $\mathbb{R}$. Par composée puis différence, $f$ est donc définie sur
$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1+x^2 > 0\} = \mathbb{R}$$
car on a toujours $1+x^2 \geqslant 1 > 0$.

2. 
   - <u>En $-\infty$</u> : $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln(u) = +\infty$ donc par composée, $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+x^2) = +\infty$. Et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$. Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.
   - Soit $x > 0$.
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right) - x = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) - x \\ &= 2\ln(x) - x + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) \\ &= x\left(2\times\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) \end{aligned}$$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = \ln(1) = 0$ par composée. Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.
Autre méthode : pour $x > 0$
$$f(x) = \ln\left(1+x^2\right) - \ln(\mathrm{e}^x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{\mathrm{e}^x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x} + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)$$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$ par croissance comparée. De plus, $\lim\limits_{u\to 0}\ln(u) = -\infty$ donc par composée, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

3. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1+x^2$ sont polynomiales donc dérivables sur $\mathbb{R}$. Par composée et différence, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x-1-x^2}{1+x^2} = -\frac{(1-x)^2}{1+x^2} \leqslant 0.$$
Donc $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

4. $f(0) = \ln(1) = 0$.
Puisque $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant f(0) = 0$. En particulier, $\boxed{\text{pour } x \in [0,1],\ f(x) \leqslant 0.}$
Justifions que $x = 0$ est la seule solution de $f(x) = 0$ sur $[0,1]$. Pour tout réel $x$, $f'(x) \leqslant 0$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (nombre fini de solutions) donc $f$ est en fait strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour $x > 0$, $f(x) < f(0) = 0$ et donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]0,1]$.
Ceci montre que $\boxed{x = 0 \text{ est la seule solution de } f(x) = 0 \text{ sur } [0,1].}$

5. Notons $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1+x^2$ sont polynomiales donc dérivables sur $\mathbb{R}$. Par composée et différence, $g$ est définie et dérivable sur $\{x \in \mathbb{R} \mid 1+x > 0\} = ]-1,+\infty[$, donc en particulier sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \geqslant 0$.
$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leqslant 0.$$
Donc $g$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et ainsî, pour $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant g(0) = 0$. On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x.}$

## Partie II : étude d'une suite

6. 
```python
import numpy as np
u = 1
L = [u]
for k in range(100):
    u = np.log(1+u**2)
    L.append(u)
print(L)
```

7. <u>Initialisation</u> : $u_0 = 1$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
On a : $0 \leqslant (u_n)^2 \leqslant 1$ par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ donc $1 \leqslant 1+(u_n)^2 \leqslant 2 \leqslant \mathrm{e}$.
Par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on a
$$\ln(1) \leqslant \ln(1+(u_n)^2) \leqslant \ln(\mathrm{e}) \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$
<u>Conclusion</u> : d'après le principe de récurrence, $\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \ln(1+(u_n)^2) - u_n = f(u_n) \leqslant 0$ car $u_n \in [0,1]$ (question 4). Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

9. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\ell$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc par passage à la limite, $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
De plus, $u_{n+1} = \ln(1+(u_n)^2)$. D'après le cours, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+(u_n)^2) = \ln(1+\ell^2)$ donc
$$\ell = \ln(1+\ell^2) \quad \text{donc} \quad f(\ell) = 0.$$
D'après la question 4, on a donc $\ell = 0$. $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$

10.
```
n = 0
u = 1
while u >= 10**(-4) :
    n = n+1
    u = np.log(1+u**2)
print(n)
```

11. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - (u_n)^2 = \ln(1+(u_n)^2) - (u_n)^2 \leqslant 0$ d'après la question 5 avec $x = (u_n)^2 \geqslant 0$. Donc $\boxed{u_{n+1} \leqslant u_n^2.}$

(b) <u>Initialisation</u> : $u_1 = \ln(1+1^2) = \ln(2) \leqslant (\ln(2))^1$.
<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n \leqslant (\ln(2))^n$.
D'après la question précédente, $u_{n+1} \leqslant u_n^2 \leqslant (\ln(2))^{2n}$ par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$.
Or, $2n \geqslant n+1$ (car $n \geqslant 1$, c'est ici que l'on voit que ça ne marche pas en $n=0$) et $\ln(2) \in [0,1]$ donc $(\ln(2))^{2n} \leqslant (\ln(2))^{n+1}$. Ainsi, $u_{n+1} \leqslant (\ln(2))^{n+1}$.
<u>Conclusion</u> : d'après le principe de récurrence, $\boxed{u_n \leqslant (\ln(2))^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

(c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k \leqslant (\ln(2))^k$.
Ceci est aussi valable en $k=0$ car $u_0 = 1 \leqslant (\ln(2))^0$ (c'est l'hérédité que ne fonctionnait pas au rang 0 à la question précédente). Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leqslant (\ln(2))^k$. Par croissance de la somme,
$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (\ln(2))^k.$$
Or $\ln(2) \neq 1$ donc (on reconnaît une somme géométrique),
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \frac{1-(\ln(2))^n}{1-\ln(2)}}.$$

## Problème

### Partie I : calcul matriciel

1. Soient $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$PX = B \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + 2z = a \\ 2x + z = b \\ 3x - y - 3z = c \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + 2z = a & \\ \boxed{-2y} - 3z = -2a + b & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -4y - 9z = -3a + c & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}b & L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2 \\ \boxed{-2y} - 3z = -2a + b & \\ -3z = a - 2b + c & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{6}c \\ y = \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}c \\ z = -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c \end{cases}$$

Pour tout $B$ il y a une unique solution donc $P$ est inversible et ici on lit :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}Q}$$

2. Après calculs, $\boxed{D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$ donc est bien diagonale.

3. $D = P^{-1}MP$ donc $PDP^{-1} = PP^{-1}MPP^{-1} = M$. Ainsi, $\boxed{M = \frac{1}{6}PDQ}$. Or, $D$ est diagonale et n'a aucun coefficient diagonal nul donc elle est inversible et $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. De plus, $P$ et $P^{-1}$ sont inversibles donc par produit, $M$ est inversible et $\boxed{M^{-1} = P^{-1}D^{-1}P = \frac{1}{6}Q \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} P.}$

4. $D$ étant une matrice diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.}$

5. On réalise une récurrence.
<u>Initialisation</u>. Pour $n = 0$,
$M^0 = I_3$ d'une part, et $\frac{1}{6}PD^0Q = \frac{1}{6}PI_3Q = \frac{1}{6}PQ = I_3$ d'autre part, donc $M^0 = \frac{1}{6}PD^0Q$.
<u>Hérédité</u>. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $M^n = \frac{1}{6}PD^nQ$.
Alors $\frac{1}{6}PD^{n+1}Q = \frac{1}{6}PD^nDQ = \frac{1}{6^2}PD^nQMPQ = \frac{1}{6}M^n.M.6I_3 = M^{n+1}$.
<u>Conclusion</u>. D'après le principe de récurrence, la propriété $\boxed{M^n = \frac{1}{6}PD^nQ}$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

6. La première colonne de la matrice $M^n$ est le résultat de $M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire

$$\frac{1}{6}PD^nQ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}PD^n \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}P \begin{pmatrix} 5^n \\ 9 \\ -2^{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n + 9 - 2^{n+2} \\ 2 \times 5^n - 2^{n+1} \\ 3 \times 5^n - 9 + 3 \times 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

## Partie II : étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon

7. L'athlète commence, au jour 0, par de la natation. Ainsi, $\boxed{a_0 = 1 \text{ et } b_0 = c_0 = 0}$ et au jour suivant, on a d'après l'énoncé : $\boxed{a_1 = b_1 = \frac{1}{5} \text{ et } c_1 = \frac{3}{5}.}$

8. On cherche $P(A_0 \cap C_1 \cap B_2 \cap A_3)$. D'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} P(A_0 \cap C_1 \cap B_2 \cap A_3) &= P(A_0)P_{A_0}(C_1)P_{A_0 \cap C_1}(B_2)P_{A_0 \cap C_1 \cap B_2}(A_3) \\ &= 1 \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A_0 \cap C_1 \cap B_2 \cap A_3) = \frac{6}{125}}$$

9. On cherche $P_{B_2}(A_1)$. D'après la formule de Bayes,

$$P_{B_2}(A_1) = \frac{P(A_1)P_{A_1}(B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}}{P(B_2)}.$$

Or, $(A_1, B_1, C_1)$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(B_2) = P(A_1)P_{A_1}(B_2) + P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(C_1)P_{C_1}(B_2) = \frac{1}{5}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\times\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{7}{25}.$$

Ainsi,

$$\boxed{P_{B_2}(A_1) = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{1}{7}.}$$

10. Pour tout $n \geq 0$, les évènements $A_n$, $B_n$ et $C_n$ forment un système complet d'évènements.

Donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{5}P(A_n) + \frac{2}{5}P(B_n) \\ &= \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n. \end{aligned}$$

De même,

$$b_{n+1} = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1})+P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1})+P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{5}a_n+\frac{3}{5}b_n+\frac{1}{5}c_n.$$

et $\quad c_{n+1} = P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) = \dfrac{3}{5}a_n + \dfrac{4}{5}c_n.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n \\ c_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}c_n \end{cases}}$$

11.
```python
def Probas(n):
    L = [1,0,0]
    for k in range(n):
        a = L[0]
        b = L[1]
        c = L[2]
        L = [1/5*a+2/5*b , 1/5*a+3/5*b+1/5*c , 3/5*a+4/5*c]
    return L
```

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, avec

$$\boxed{A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}M.}$$

13. Notons $\boxed{X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.}$ Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \dfrac{1}{5^n}M^nX_0$.

Initialisation. Pour $n = 0$,
$\dfrac{1}{5^0}M^0X_0 = 1 \times I_3X_0 = X_0$.

Hérédité.Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = \dfrac{1}{5^n}M^nX_0$.
Alors, d'après la question précédente,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}MX_n = \frac{1}{5}M \times \frac{1}{5^n}M^nX_0 = \frac{1}{5^{n+1}}M^{n+1}X_0.$$

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $\boxed{X_n = \dfrac{1}{5^n}M^nX_0 \text{ ppur tout } n \in \mathbb{N}.}$

Or $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc

$$M^nX_0 = \text{première colonne de } M^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2 \times 5^n - 2 \times 2^n \\ 3 \times 5^n + 3 \times 2^{n+1} - 9 \end{pmatrix}$$

d'après la question 6. Ainsi, $\boxed{a_n = \dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$, $\boxed{b_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$

et $\boxed{c_n = \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$

14. Puisque $\dfrac{2}{5} \in ]-1,1[$ et $\dfrac{1}{5} \in ]-1,1[$ on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$.

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{6}}$, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}}$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{2}}$