DEVOIR SURVEILLÉ 3

Vendredi 9 décembre 2022 – 4h

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes et portent sur des sujets variés (A.D.C.)

1. Déterminer la limite de $g : x \mapsto \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$ en $+\infty$.
2. Déterminer les limites de $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{1/x}$ quand x tend vers 0 à gauche et à droite.
3. Déterminer la limite de $h : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ en 0.
4. Écrire une fonction python, appelée `minimum(L)` qui, étant donnée une liste non vide de nombres L, renvoie son minimum.
5. Écrire un programme python qui calcule $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{50} k^4$.
6. Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
7. Calculer la somme $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{3^{k-n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

On note dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les deux matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère également les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. définies par :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n, \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

1. (a) Calculer le produit matriciel $(M - I)(M + 3I)$.
   (b) En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1}.
2. (a) Écrire une fonction python `SuitesUV(n)` qui, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, renvoie la liste $[u_n, v_n]$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = u_n M + v_n I$.
3. (a) Déterminer la matrice carrée A d'ordre 2 telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. (a) Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier que Q est inversible puis déterminer Q^{-1}.
   (b) Déterminer la matrice D telle que $D = Q^{-1}AQ$.
   (c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $A^n = QD^nQ^{-1}$.
   (d) En déduire que pour tout entier naturel n :
   $$A^n = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 + (-3)^{n+1} & -1 + (-3)^n \\ -3 - (-3)^{n+1} & -3 - (-3)^n \end{pmatrix}$$
   (e) Déterminer les valeurs de u_n et v_n en fonction de n.
5. Expliciter, pour tout entier naturel n, les neuf coefficients de la matrice M^n.

Exercice 3

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1 \ \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) \\ \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = v_n - u_n$.

1. Vérifier que $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $v_1 = \dfrac{3}{4}$; calculer u_2 et v_2.
2. Écrire un programme python suivant qui permet de calculer et d'afficher les valeurs de u_{100} et v_{100}.
3. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2} w_n$.
4. En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
5. Montrer que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

6. En déduire à l'aide de la question 3 l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que l'expression trouvée reste valide pour $n = 0$.

7. Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner sa limite.

8. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n et donner la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x+x^2}$. On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f.

Partie I

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Dresser, en le justifiant, le tableau de variation complet de f.

4. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 .
   (b) Montrer que pour tout réel x de $[-1, +\infty[$, on a : $f(x) \leqslant x$ Donner une interprétation graphique de ce résultat.

5. Tracer l'allure de $(\mathcal{C}_f)$ et (T) dans un repère orthonormé. On soignera en particulier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (T)

Partie II

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{1+u_n+u_n^2}$$

6. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}$$

   En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$$

7. Montrer, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$$

8. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser sa limite.

9. Recopier et compléter le script du programme python suivant, pour qu'il définisse la fonction f puis calcule, en utilisant f, le plus petit entier naturel non nul n tel que $u_n \leqslant 1/1000$.

```
def f(x):
    ...

u = ...
n = ...
while ........ :
        u = ...
        n = ...

print(...)
```

Partie III

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_1 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = f(v_n) = \frac{v_n}{1 + v_n + v_n^2}$$

10. Démontrer que :
$$\forall n \geqslant 2, -1 \leqslant v_n \leqslant 0$$

11. En utilisant la question 4 de la Partie I, étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$.

12. En déduire la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis déterminer sa limite.

13. (a) Résoudre l'équation $f(x) = -1$, d'inconnue réelle x.

    (b) Montrer par l'absurde que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \neq -1$$