Devoir surveillé 3 – Corrigé

Exercice 1

1. Soit $x > 0$. On utilise la quantité conjuguée :

$$g(x) = \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})} = \frac{(x+2)-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$. Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2} = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$. Par somme puis quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0}$.

2.
   - $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc par composée, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \mathrm{e}^{1/x} = 0$. Par produit, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = 0}$.
   - Soit $x > 0$. Posons $X = \frac{1}{x} \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\longrightarrow} +\infty$. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^X}{X}$. Or $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ par croissance comparée. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty}$.

3. On a une puissance variable donc $h(x) = \exp(\frac{1}{x}\ln(1+x))$. Par taux d'accroissement usuel, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to1} = \mathrm{e}^x = \mathrm{e}$ donc, par composée, $\boxed{\lim\limits_{x\to0} h(x) = \mathrm{e}}$.

4.
```python
def minimum(L):
    mini = L[0]
    for i in range(1,len(L)):
        if L[i] < mini:
            mini = L[i]
    return mini
```

5.
```python
S = 0
for k in range(1,51):
    S = S + k**4
print(S)
```

6.
   - Méthode 1 : on développe $(k-1)^2 = k^2 - 2k + 1$. Par linéarité de la somme,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\times\frac{n(n+1)}{2} + n$$
$$\boxed{S_n = \frac{2n^3-3n^2+n}{6}}$$
   - Méthode 2 : On fait un glissement d'indice en posant $i = k-1$:
$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

7. $\boxed{T_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\times3^{n-k} = (2+3)^n = 5^n}$, d'après la formule du binôme..

Exercice 2

1. (a) $M - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $M + 3I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   alors $\boxed{(M-I)(M+3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3}$.

   (b) En développant la relation précédente, on obtient :
   $0_3 = M^2 + 3MI - IM - 3I^2 = M^2 + 2M - 3I$. Donc $\frac{1}{3}M^2 + \frac{2}{3}M = I$, puis $M\left(\frac{1}{3}M + \frac{2}{3}I\right) = I$. On en déduit que $\boxed{M \text{ est inversible et } M^{-1} = \frac{1}{3}M + \frac{2}{3}I}$.

2. (a)
```python
def SuitesUV(n):
    u = 0
    v = 1
    for k in range(n):
        old_u = u
        u = -2*u+v
        v = 3*old_u
    return [u,v]
```

(b) Initialisation : $M^0 = I$ et $u_0M + v_0I = 0 \times M + 1 \times I = I$ donc $M^0 = u_0M + v_0I$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $M^n = u_nM + v_nI$.

$$M^{n+1} = M^nM = (u_nM + v_nI)M = u_nM^2 + v_nM.$$

Or, d'après la question 1, $M^2 + 2M - 3I = 0_3$ donc $M^2 = 3I - 2M$. Ainsi,

$$M^{n+1} = u_n(3I - 2M) + v_nM = (-2u_n + v_n)M + 3u_nI = u_{n+1}M + v_{n+1}I.$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = u_nM + v_nI.}$

3. (a) La matrice $\boxed{A\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}}$ est telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1}\\ v_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}$.

(b) Initialisation : $A^0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = I_2\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix} = AA^n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = A^{n+1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\boxed{\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$.

4. (a) $1\times(-1)-3\times 1 = -4 \neq 0$ donc $\boxed{Q \text{ est inversible et } Q^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}}$

(b) $Q^{-1}AQ = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

$Q^{-1}AQ = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}$ donc $\boxed{D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}}$.

(c) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n, \mathcal{P}_n : A^n = QD^nQ^{-1}$.
Remarque : $D = Q^{-1}AQ$ donc $QDQ^{-1} = QQ^{-1}AQQ^{-1} = A$.
<u>Initialisation :</u> $A^0 = I_2$ et $QD^0Q^{-1} = QI_2Q^{-1} = QQ^{-1} = I_2$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Supposons que pour un entier n, on ait $\mathcal{P}_n$ vraie .
$A^{n+1} = AA^n = (QDQ^{-1})(QD^nQ^{-1}) = QDD^nQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}$, donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
<u>Conclusion :</u> On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que $\boxed{\text{pour tout entier } n, A^n = QD^nQ^{-1}.}$

(d) Puisque D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}A^n &= QD^nQ^{-1}\\ &= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\\ &= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ (-3)^{n+1} & (-3)^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On a bien : $\boxed{A^n = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix}-1+(-3)^{n+1} & -1+(-3)^n\\ -3-(-3)^{n+1} & -3-(-3)^n\end{pmatrix}}$

(e) $\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix}-1+(-3)^{n+1} & -1+(-3)^n\\ -3-(-3)^{n+1} & -3-(-3)^n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix}-1+(-3)^n\\ -3-(-3)^n\end{pmatrix}$

par identification : $\boxed{u_n = \frac{1-(-3)^n}{4} \text{ et } v_n = \frac{3+(-3)^n}{4}, n \in \mathbb{N}}$.

5. Pour tout entier naturel n, $M^n = u_nM + v_nI$ (question 2.b.) ,

$$M^n = \frac{1-(-3)^n}{4}\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix} + \frac{3+(-3)^n}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{M^n = \begin{pmatrix}\frac{5-(-3)^n}{4} & \frac{-1+(-3)^n}{2} & \frac{1-(-3)^n}{4}\\ \frac{1-(-3)^n}{2} & (-3)^n & \frac{1-(-3)^n}{2}\\ \frac{-1+(-3)^n}{4} & \frac{1-(-3)^n}{2} & \frac{3+(-3)^n}{4}\end{pmatrix}}$

Exercice 3

1. $u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + v_0) = \frac{1}{2}$, $v_1 = \frac{1}{2}(u_1 + v_0) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.
$u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + v_1) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{8}$, $v_2 = \frac{1}{2}(u_2 + v_1) = \frac{1}{2} \times \frac{11}{8} = \frac{11}{16}$.

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{2},\ v_1 = \frac{3}{4},\ u_2 = \frac{5}{8},\ v_2 = \frac{11}{16}}$$

2.
```python
u = 0
v = 1
for k in range(100):
    u = 1/2*(u+v)
    v = 1/2*(u+v)
print('u(100) =', u, 'v(100) =', v)
```

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - u_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{1}{2}w_n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) = \frac{1}{2}(u_n - u_{n+1}) = \frac{1}{4}w_n$. Donc $\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{4}}$.

5. D'après le cours sur les sommes géométriques de raison $\frac{1}{4} \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = w_0 \times \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

6. Puisque $w_k = 2(u_{k+1} - u_k)$, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$, par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 2\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = 2(u_n - u_0) = 2u_n.$$

Donc $\boxed{u_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}$. Cette relation est bien vraie pour $n = 0$ car $\frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^0\right) = \frac{2}{3}(1-1) = 0 = u_0$.

7. Puisque $-1 < \frac{1}{4} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}}$. Le fait que cette limite est réelle prouve la convergence.

8. Puisque $w_n = v_n - u_n$ et que (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier termie $w_0 = 1$, on a : $v_n = w_n + u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$ donc $\boxed{v_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n}$. Avec le même raisonnement qu'à la question précédente, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{2}{3}}$.

Problème

Partie I

1. L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ donc elle n'a pas de racine réelle. La fonction f est rationnelle et son dénominateur ne s'annule pas donc elle est $\boxed{\text{définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$.

2. Soit $x \neq 0$.
$$f(x) = \frac{x}{x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right)} = \frac{1}{x\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right)}.$$

Or $\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\to} 0$ et $\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0}$.

De même $\frac{1}{x} \underset{x\to-\infty}{\to} 0$ et $\frac{1}{x^2} \underset{x\to-\infty}{\to} 0$ donc $\boxed{f(x) \underset{x\to-\infty}{\to} 0}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{1 + x + x^2 - x(1+2x)}{(1+x+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x+x^2)^2}.$$

Puisque $(1+x+x^2)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - x^2$. $f(-1) = -1$, $f(1) = \frac{1}{3}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

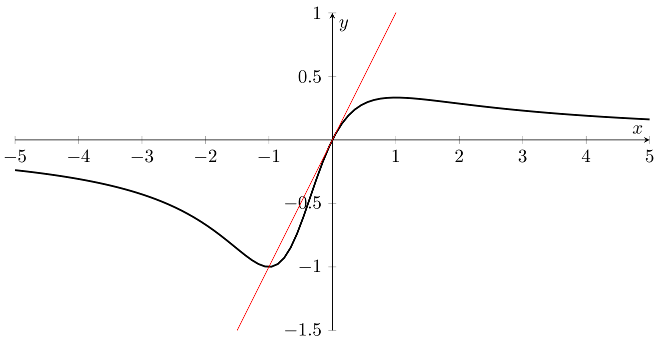
4. (a) Une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 est donnée par la formule

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \text{ c'est-à-dire } \boxed{y = x}.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x)-x = \frac{x}{1+x+x^2} - x = \frac{x - x(1+x+x^2)}{1+x+x^2} = \frac{-x^2-x^3}{1+x+x^2} = \frac{-x^2(1+x)}{1+x+x^2}.$$

Or $1+x+x^2 > 0$. De plus si $x \geqslant -1$ alors $1+x \geqslant 0$ de sorte que $f(x)-x \leqslant 0$. Finalement, pour tout réel x de $[-1,+\infty[$, on a $f(x) \leqslant x$. Donc $\mathcal{C}_f$ est sous sa tangente en 0 sur l'intervalle $[-1,+\infty[$.

5. 

Partie II

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \times \dfrac{n}{n} = \dfrac{1}{n+1+\frac{1}{n}}$. On a $0 < \frac{1}{n}$ donc $0 < n+1 < n+1+\frac{1}{n}$, en composant par $u \mapsto \frac{1}{u}$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a $\boxed{f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}.}$

7. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_n$: $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$.
On sait que $u_1 = 1 \in]0,1]$ donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$, alors $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$. Or f est croissante sur $[0,1]$ donc $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.}$

8. Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, par encadrement, (u_n) converge et $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.}$

9.
```
def f(x):
    return x/(1+x+x**2)

u = 1
n = 1
while u > 1/1000 :
        u = f(u)
        n = n+1
print(n)
```

Partie III

10. Initialisation : $v_1 = -2$, $v_2 = \dfrac{-2}{1-2+4} = -\dfrac{2}{3}$. donc $-1 \leqslant v_2 \leqslant 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ tel que $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.On sait que f est croissante sur $[-1,1]$ donc
$$f(-1) \leqslant f(v_n) \leqslant f(0)$$
donc $-1 \leqslant v_{n+1} \leqslant 0$.
Bilan : $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 2, \quad -1 \leqslant v_n \leqslant 0.}$

11. La question 4 de la Partie I nous dit que si $x \in [-1,1]$ alors $f(x) \leqslant x$ donc, pour tout $n \geqslant 2$, $\quad -1 \leqslant v_n \leqslant 0$ implique $f(v_n) \leqslant v_n$ donc $v_{n+1} \leqslant v_n$.
Finalement la suite $\boxed{(v_n)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante.}}$

12. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir du rang 2 et elle est minorée par -1 donc elle converge. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \in \mathbb{R}$. $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante donc $v_n \leqslant v_2$. Par passage à la limite, on a : $\ell \leqslant v_2 = -\dfrac{2}{3}$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$. Par passage à la limite dans la relation de récurrence : $\ell = \dfrac{\ell}{1+\ell+\ell^2}$ donc $\ell + \ell^2 + \ell^3 = \ell$ donc $\ell^2(1+\ell) = 0$. Ceci donne $\ell = 0$ (impossible car $\ell \leqslant -\dfrac{2}{3}$) ou $\ell = -1$. Donc $\boxed{(v_n) \text{ converge vers } -1.}$

13. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, par produit en croix,
$$f(x) = -1 \iff 1+2x+x^2 = 0 \iff (1+x)^2 = 0 \iff \boxed{x=-1}.$$

(b) La négation de $\Big(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \neq -1\Big)$ est $\Big(\exists n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = -1\Big)$.
Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_n = -1$. Comme $v_1 = -2$, on a $n > 1$ donc v_{n-1} existe et $v_n = f(v_{n-1}) = -1$ donc avec la question ci-dessus $v_{n-1} = -1$. On montre alors de proche en proche que $v_n = v_{n-1} = \ldots = v_2 = -1$ et donc $f(v_1) = v_2 = -1$ donc $v_1 = -1$ ce qui est absurde.
Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \neq -1.}$