DEVOIR SURVEILLÉ 3

Vendredi 3 décembre 2021 – 4h
Calculatrices et documents interdits.
Soignez la présentation, encadrez vos résultats et conclusions.

Informatique : soignez la présentation de vos programmes (lisibilité, indentation, etc.). On chargera la bibliothèque numpy dès que nécessaire.

Exercice 1
Applications directes du cours

1. Calculer $S_n = \sum_{k=2}^{n}(k+1)^2$. On donnera la réponse sous la forme d'un quotient simplifié, avec le numérateur développé.
2. Calculer $T_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{3^k}$.
3. Former le triangle de Pascal jusqu'à $n = 5$. En déduire la formule donnant $(a-b)^5$.
4. Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice M est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
5. Soit $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. La matrice N est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
6. Soit $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. La matrice T est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
7. Soient
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 1\}$$
et
$$B = \{(2a + b + 1, 7a + 3b + 2, 3a + b + 1), \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$
Montrer que $A = B$.
8. Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On réalise 3 tirages successifs sans remise. Combien y a-t-il de possibilités ?
9. On pioche une main de 4 cartes dans un jeu de 32 cartes. Ce jeu contient 8 cœurs, 8 trèfles, 8 carreaux et 8 piques. Déterminer le nombre de mains contenant 2 trèfles et 2 cœurs.
10. Démontrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x^2 + 1}$.

Exercice 2

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Réaliser l'étude de la fonction g. On dressera un tableau de variation complet.
   Rappel : le tableau de variation doit être la conclusion finale de votre étude.
2. Étudier les limites de f en 0^+ et $+\infty$.
3. (a) Déterminer $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax)$.
   (b) Déterminer la position relative de Δ, droite d'équation $y = ax + b$, par rapport à $\mathcal{C}_f$.
4. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$. En déduire les variations de f.
5. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
6. Tracer l'allure (la plus précise possible) du graphe de $\mathcal{C}_f$. On fera apparaître les résultats des questions précédentes.

Problème

Dans ce problème, on se propose de déterminer, en utilisant le calcul matriciel, le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = -2,\ u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = \dfrac{3}{2}u_{n+2} - \dfrac{3}{4}u_{n+1} + \dfrac{1}{8}u_n \end{cases}$

Partie 1- Écriture matricielle

Soient $A = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 1 & -6 & 12 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout n, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Démontrer *soigneusement* que, pour tout n, $X_n = A^n X_0$.

Partie 2- Calcul des puissances de A

On considèrera les matrices :

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 16 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
4. Vérifier que $A = PTP^{-1}$. *On fera apparaître les calculs intermédiaires.*
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \dfrac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

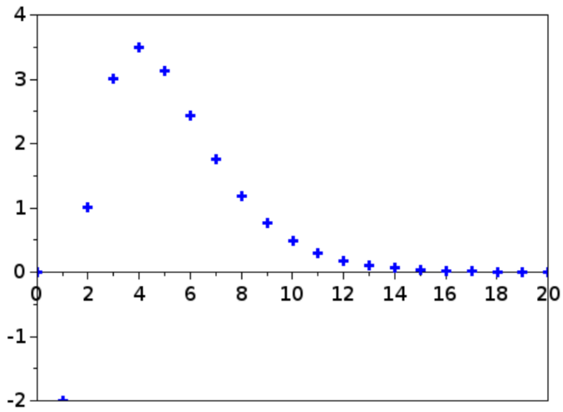
$$A^n = \frac{1}{2^{n+3}}\begin{pmatrix} 4(n-2)(n-1) & -16n(n-2) & 16n(n-1) \\ 2n(n-1) & 8(1-n^2) & 8n(n+1) \\ n(n+1) & -4n(n+2) & 4(n+1)(n+2) \end{pmatrix}$$

Partie 3- Expression et étude de la suite (u_n)

8. (a) Recopier et compléter la fonction python suivante qui, étant donné un entier naturel n, doit renvoyer la valeur de u_n.

```
def SuiteU(n) :
    X = [0, -2, 1]
    for k in range(...) :
        u = ...
        X[0] = ...
        X[1] = ...
        X[2] = ...
    return ...
```

(b) On a utilisé ce programme pour tracer les premiers termes de cette suite, de u_0 à u_{20}.



Que peut-on conjecturer (on sera le plus précis possible) :
- sur la monotonie de la suite (u_n) ?
- sur la limite éventuelle de la suite (u_n) ?

9. Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3n^2 - 5n}{2^{n-1}}$.

10. Étudier la limite de (u_n).

11. Écrire un programme python qui détermine le plus petit entier naturel $n \geqslant 2$ tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$. On pourra utiliser la fonction de la question 8.

12. Montrer que (u_n) est monotone à partir d'un certain rang n_0 que l'on précisera.

Partie 4- Calcul d'une somme

On souhaite maintenant calculer la somme des premiers termes de (u_n), c'est à-dire $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}, \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}, \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2^{k-1}}.$$

13. Donner l'expression de R_n en fonction de n.

14. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 4 - \dfrac{n+2}{2^{n-1}}$.

15. (a) Exprimer $V_{n+1} - V_n$ en fonction de n et montrer par ailleurs que $V_{n+1} = \dfrac{1}{2}V_n + T_n + R_n$.

(b) En déduire l'expression de V_n en fonction de n.

16. Calculer l'expression de S_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.