DEVOIR SURVEILLÉ 3 – CORRIGÉ

Exercice 1

1. Par linéarité,

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}(k^2+2k+1) = \sum_{k=2}^{n} k^2 + \sum_{k=2}^{n}(2k+1).$$

Or, $(2k+1)_k$ est une suite arithmétique, donc

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - 1^2\right) + \frac{5+(2n+1)}{2} \times (n-2+1) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 + \frac{(2n+6)(n-1)}{2} \\ &= \frac{(n^2+n)(2n+1) - 6 + 3(2n^2+4n-6)}{6} \\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n-24}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \frac{2n^3+9n^2+13n-24}{6}}$$

2. $T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \times 1^{n-k} = \left(\frac{1}{3}+1\right)^n$, d'après la formule du binôme de Newton.

$$\boxed{T_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n}$$

3.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

$$\begin{aligned} (a-b)^5 &= (a+(-b))^5 \\ &= a^5 + 5a^4(-b) + 10a^3(-b)^2 + 10a^2(-b)^3 + 5a(-b)^4 + (-b)^5 \end{aligned}$$

$$\boxed{(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5}$$

4. $\det(M) = 4\times1 - 2\times(-1) = 6 \neq 0$ donc $\boxed{M \text{ est inversible}}$ et $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}$.

5. N est diagonale et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls donc $\boxed{N \text{ est inversible}}$ et $\boxed{N^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}$.

6. T est triangulaire et un de ses coefficients diagonaux est nul donc $\boxed{T \text{ n'est pas inversible.}}$

7.
- Soit $u \in B$. On a $u = (2a+b+1, 7a+3b+2, 3a+b+1)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, $u = (x,y,z)$ avec $\begin{cases} x = 2a+b+1 \\ y = 7a+3b+2 \\ z = 3a+b+1 \end{cases}$. On a alors

$$2x - y + z = 2(2a+b+1) - (7a+3b+2) + (3a+b+1) = 1$$

donc $u \in A$. Ceci montre que $\boxed{B \subset A}$.

- Soit $u \in A$. On a $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $2x - y + z = 1$. On cherche a et b tels que $u = (2a+b+1, 7a+3b+2, 3a+b+1)$.

$$(2a+b+1, 7a+3b+2, 3a+b+1) = u \iff \begin{cases} 2a+\boxed{b}+1 = x \\ 7a+3b+2 = y \\ 3a+b+1 = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a+\boxed{b}+1 = x \\ a-1 = y-3x & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ a = z-x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2z-2x+b+1 = x \\ z-x-1 = y-3x \\ a = z-x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = 3x-2z-1 \\ 2x-y+z = 1 & \text{vrai car } u \in A \\ a = z-x \end{cases}$$

Donc $a = z-x$ et $b = 3x-2z-1$ conviennent et $u \in B$. Ceci montre que $\boxed{A \subset B}$.

Conclusion : par double inclusion, $\boxed{A = B}$.

8. - Pour le premier tirage, il y a 6 possibilités.
   - Puis, pour le second, il y a 5 possibilités car les tirages sont sans remise.
   - Puis, pour le troisième, il y a 4 possibilités.

   Au total, $\boxed{\text{il y a } 6 \times 5 \times 4 = 120 \text{ possibilités.}}$

9. Pour obtenir 2 trèfles et 2 cœurs,
   - on pioche 2 trèfles parmi les 8 trèfles du jeu : il y a $\binom{8}{2} = \dfrac{8 \times 7}{2} = 28$ possibilités ;
   - puis, on pioche 2 coeurs parmi les 8 coeurs du jeu : il y a $\binom{8}{2} = 28$ possibilités.

   Au total, $\boxed{\text{cela fait } \binom{8}{2} \times \binom{8}{2} = 28^2 \text{ possibilités.}}$

10. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Méthode 1 : par équivalence.

$$\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x^2+1} \iff (\sqrt{x})^2 \leqslant (\sqrt{x^2+1})^2 \quad \text{par stricte croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$
$$\iff x^2 - x + 1 \geqslant 0$$

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = -3 < 0$ donc pour tout réel x, $x^2 - x + 1 > 0$. On en déduit que $x^2 - x + 1 \geqslant 0$ est vraie, donc par équivalence, $\boxed{\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x^2+1} \text{ est vraie pour tout } x \in \mathbb{R}_+.}$

Méthode 2 : signe de la différence.

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}} = \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}$$

Or, comme au dessus, on a $x^2 - x + 1 > 0$ et $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x} > 0$, donc $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x} \geqslant 0$, c'est-à-dire $\boxed{\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x^2+1}.}$

Exercice 2

1. Étudions la fonction g, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (dit dans l'énoncé).
   - $x \mapsto 2x^3 + 3$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par combinaison linéaire, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Limites : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$.
     Pour $x > 0$,
     $$g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3 = x^3\left(2 - 6\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right).$$
     Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
   - Variations : Pour tout $x > 0$, $g'(x) = 6x^2 - \dfrac{6}{x} = \dfrac{6}{x}(x^3 - 1)$.
     Or, $\dfrac{6}{x} > 0$ et de plus
     $$x^3 - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 > 1^3 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$$
     par stricte croissance de la fonction cube sur $\mathbb{R}$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

2. ▷ $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, donc par produit puis somme $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.}$

▷ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc par produit, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$. Par suite, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$

3. (a) ▷ Soit $x > 0$. $\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{\ln(x)}{x^3}$. Comme à la question précédente, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = 0$ par croissance comparée, donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2}$, c'est-à-dire $\boxed{a = 2}$.

▷ Soit $x > 0$. $f(x) - ax = f(x) - 2x = \frac{\ln(x)}{x^2}$. D'après la question précédente, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = 0}$, c'est-à-dire $\boxed{b = 0}$.

(b) La position relative est donnée par le signe de $f(x) - 2x = \frac{\ln(x)}{x^2}$.
Si $x \in]0,1[$, $\ln(x) < 0$ donc $f(x) - 2x < 0$: $\underline{\mathcal{C}_f \text{ est en-dessous de } \Delta \text{ sur }]0,1[}$.
Si $x = 1$, $f(x) - 2x = 0$: $\underline{\mathcal{C}_f \text{ et } \Delta \text{ de coupent en } x = 1}$.
Si $x \in]1,+\infty[$, $\ln(x) > 0$ donc $f(x) - 2x > 0$: $\underline{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } \Delta \text{ sur }]1,+\infty[}$.

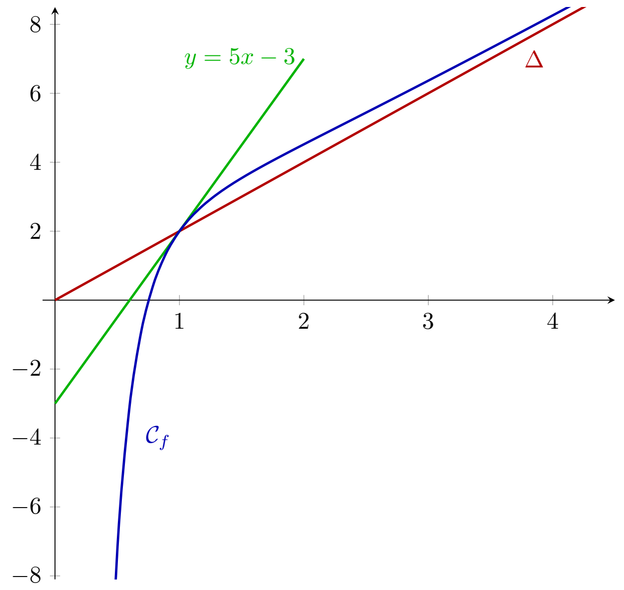
4. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit et somme et, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 2 + 3\frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln(x)}{x^4} = 2 + 3\frac{1 - 2\ln(x)}{x^3} = \frac{2x^3 + 3 - 6\ln(x)}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}.$$

Or, d'après la question 1, g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

5. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Or $f'(1) = \frac{g(1)}{x^3} = 5$ et $f(1) = 2$. La tangente a donc pour équation $\boxed{y = 5x - 3}$.

6.



Remarquons que $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = 0$ donc $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = 2x$ se rapprochent quand $x \to +\infty$.

Problème

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$AX_n = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 1 & -6 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8u_{n+1} \\ 8u_{n+2} \\ 12u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

2. On montre par récurrence que, pour tout n, $X_n = A^n X_0$:
Initialisation : pour $n = 0$, $A^0 = I_3$, donc on a bien $X_0 = A^0 X_0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = A^n X_0$. Alors $X_{n+1} = AX_n = A^{n+1}X_0$.
D'après le principe de récurrence, $\boxed{X_n = A^n X_0 \text{ pour tout entier naturel } n.}$

3. Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ des matrices de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$PX = B \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 8y + 16z = a \\ 2x = b \\ x + 2y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8y + 16z = a - 2b \\ x = \frac{b}{2} \\ 2y = c - \frac{b}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16z = a - 2b + 8\left(\frac{c}{2} - \frac{b}{4}\right) \\ x = \frac{b}{2} \\ y = \frac{c}{2} - \frac{b}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{a}{16} - \frac{b}{4} + \frac{c}{4} \\ x = \frac{b}{2} \\ y = \frac{c}{2} - \frac{b}{4} \end{cases}$$

Pour tout $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $PX = B$ a une unique solution, donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$.

On a $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \\ 1/16 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 8 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}}$.

4. Calcul à poser sur la copie.

5. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$, par récurrence sur n.
Si $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $PT^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. Donc la relation est vraie au rang 0.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PT^nP^{-1}$. Alors $A^{n+1} = A^nA = PT^nP^{-1}PTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$. Donc la relation est héréditaire.
D'après le principe de récurrence, $\boxed{A^n = PT^nP^{-1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

6. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, par récurrence sur n.
Initialisation : pour $n = 0$,
$$\frac{1}{2^0}\begin{pmatrix} 1 & 2\times 0 & 2\times 0\times(-1) \\ 0 & 1 & 2\times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = T^0.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$T^{n+1} = T^nT = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1+n & 2n + n(n-1) \\ 0 & \frac{1}{2} & 1+n \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

donc
$$T^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}\begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) & 2n(n+1) \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence,
on a $\boxed{T^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

7. On sait que $A^n = PT^nP^{-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi,
$$A^n = \frac{1}{16\times 2^n}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 16 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 8 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A^n = \frac{1}{2^{n+4}}\begin{pmatrix} 8(n-2)(n-1) & -32n(n-2) & 32n(n-1) \\ 4n(n-1) & 16(1-n^2) & 16n(n+1) \\ 2n(n+1) & -8n(n+2) & 8(n+1)(n+2) \end{pmatrix}$$
$$A^n = \frac{1}{2^{n+3}}\begin{pmatrix} 4(n-2)(n-1) & -16n(n-2) & 16n(n-1) \\ 2n(n-1) & 8(1-n^2) & 8n(n+1) \\ n(n+1) & -4n(n+2) & 4(n+1)(n+2) \end{pmatrix}$$

8. (a)
```python
def SuiteU(n) :
    X = [0, -2, 1]
    for k in range(n) :
        u = 3/2*X[2] - 3/4*X[1]+1/8*X[0]
        X[0] = X[1]
        X[1] = X[2]
        X[2] = u
    return X[0]
```

(b) On peut conjecture que (u_n) n'est pas monotone, mais semble décroissante à partir du rang 4. De plus, (u_n) semble converger vers 0.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0 = A^n\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n+3}}\begin{pmatrix} 32n(n-2) + 16n(n-1) \\ * \\ * \end{pmatrix}$.

Le 1^{er} coefficient est u_n. On en déduit : $\boxed{u_n = \frac{32n(n-2) + 16n(n-1)}{2^{n+3}} = \frac{n(3n-5)}{2^{n-1}}}$.

10. $u_n = \dfrac{3n^2}{2^{n-1}} - \dfrac{5n}{2^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par somme de croissances comparées. On a bien $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} = u_n = 0}$

11.
```
# Solution 1
n = 2
while SuiteU(n) > 10**(-3):
    n = n + 1
print(n)
```

```
# Solution 2
n = 2
u = 1
while u > 0.001 :
  n = n + 1
  u = (3*n**2-5*n)/(2**(n-1))
print(n)
```

12. Montrons que (u_n) est décroissante à partie du rang 4 (d'après notre conjecture). Soit $n \geqslant 4$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)(3(n+1)-5)}{2^n} - \frac{n(3n-5)}{2^{n-1}} = \frac{-3n^2+11n-2}{2^n}$$

Étudions le signe de $-3x^2+11x-2$ pour $x \in \mathbb{R}$. C'est un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta = 121 - 24 = 97$.
Ses racines sont $x_1 = \dfrac{11+\sqrt{97}}{6} \leqslant \dfrac{11+\sqrt{100}}{6} = \dfrac{21}{6} < 4$ et $x_2 = \dfrac{11-\sqrt{97}}{6} < x_1$.
Pour tout $x > x_1$, $-3x^2+11x-2 < 0$. Or $n \geqslant 4 > x_1$. On en déduit que $\forall n \geqslant 4, u_{n+1} - u_n < 0$ $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante à partir du rang 4.}}$

13. R_n est une somme géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{R_n = \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{2}} = 2 - \dfrac{1}{2^n}.}$

14. Initialisation : $T_0 = \sum_{k=0}^{0} \dfrac{k}{2^{k-1}} = 0$ et $4 - \dfrac{0+2}{2^{0-1}} = 4-4 = 0$ donc $T_0 = 4 - \dfrac{0+2}{2^{0-1}}$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n = 4 - \dfrac{n+2}{2^{n-1}}$.

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{2^{k-1}} = T_n + \frac{n+1}{2^n} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} + \frac{n+1}{2^n} = 4 - \frac{2(n+2)-(n+1)}{2^n} = 4 - \frac{n+3}{2^n}$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ T_n = 4 - \dfrac{n+2}{2^{n-1}}.}$

15. (a) $\boxed{V_{n+1} - V_n = \dfrac{(n+1)^2}{2^n}.}$
De plus,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}V_n + T_n + R_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+2k+1}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)^2}{2^k} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{\ell^2}{2^{\ell-1}} \\ &= V_{n+1} - 0 = V_{n+1}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{V_{n+1} = \dfrac{1}{2}V_n + T_n + R_n.}$

(b) On en déduit que $\dfrac{(n+1)^2}{2^n} + V_n = V_{n+1} = \dfrac{1}{2}V_n + T_n + R_n$,
donc $V_n = 2T_n + 2R_n - \dfrac{(n+1)^2}{2^{n-1}}$
donc $V_n = 8 - \dfrac{n+2}{2^{n-2}} + 4 - \dfrac{1}{2^{n-1}} - \dfrac{(n+1)^2}{2^{n-1}} = 12 - \dfrac{2n+5+(n+1)^2}{2^{n-1}}$.

$$\boxed{V_n = 12 - \frac{n^2+4n+6}{2^{n-1}}}$$

16. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3k^2-5k}{2^{k-1}} = 3V_n - 5T_n = 36 - \frac{3(n^2+4n+6)}{2^{n-1}} - 20 + \frac{5n+10}{2^{n-1}}$.

$$\boxed{S_n = 16 - \frac{3n^2+7n+8}{2^{n-1}}}$$