# DEVOIR SURVEILLÉ 2

*Vendredi 15 octobre 2021 – 4h*
*Calculatrices et documents interdits.*
**Soignez la présentation, encadrez vos résultats et conclusions.**

Informatique : soignez la présentation de vos programmes (lisibilité, indentation, etc.). On chargera la bibliothèque numpy dès que nécessaire.

## Exercice 1
### Applications directes du cours

1. (a) Définir en python les trois variables suivantes.

$$A = \frac{2^5 \times 25 \times 3^6 \times 36}{(3^4)^2 \times 45 \times 100}$$

$$B = \frac{x}{\sqrt{x}}, \quad \text{pour } x > 0 \text{ supposé donné}$$

$$C = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

   (b) Calculer $A$, $B$ et $C$ (on donnera un résultat le plus simplifié possible).

2. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Démontrer qu'elle est impaire.

3. Étudier la limite de $g : x \mapsto \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{4 - x^2}$ en $+\infty$ et en $2^+$.

4. Calculer la dérivée de la fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^{3x}\sqrt{x^2+1}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

5. Résoudre l'inéquation $x + 3 \leqslant \dfrac{4x-2}{x-2}$.

6. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n. \end{cases}$
   Déterminer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. Écrire une fonction python `valeur_absolue(x)` qui, étant donné un nombre $x$, renvoie la valeur de $|x|$. On utilisera la définition mathématique de $|x|$. Il est ici interdit d'utiliser `np.abs`.

## Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 2u_n}{2 + u_n}.$$

*Les deux parties sont indépendantes.*

### Partie 1 - Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n - 1 > 0$.

2. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell$.
   (b) Démontrer que $\ell \geqslant 1$ et que $\ell = \dfrac{1+2\ell}{2+\ell}$.
   (c) Déterminer la valeur de $\ell$.

### Partie 2 - Étude d'une suite dépendant de $(u_n)_{n\in N}$

On considère la suite suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}.$$

4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $v_n \neq 1$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.
5. (a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.
   (b) En déduire le terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celui de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Retrouver la valeur de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## Exercice 3

*Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.*
*On rappelle que* $2 < \mathrm{e} < 3$.

### Partie 1 - Étude d'une fonction

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = x\ln(x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2. Étudier les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.
3. (a) Résoudre l'inéquation $\ln(x) + 1 \geqslant 0$. On justifiera proprement.
   (b) Dresser le tableau de variation complet de $f$.
4. Déterminer l'équation de la tangente $T$ à la courbe représentative de $f$, notée $\mathcal{C}_f$, au point d'abscisse 1.
5. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite $D$ d'équation $y = x$.
6. Représenter l'allure de la courbe de $f$, en faisant explicitement apparaître les résultats des questions précédentes.

### Partie 2 - Étude d'une suite récurrente

On considère la quite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \ln(u_n) \end{cases}$$

7. Écrire une fonction python `suite_u(n)` qui étant donné $n \in \mathbb{N}$, renvoie la valeur de $u_n$.
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \mathrm{e}$.
9. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
10. Démontrer par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

## Exercice 4

On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{rcl} ]0;+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

1. Justifier que $\varphi$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

   Pour la suite, on admettra qu'elle est en fait trois fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

2. Déterminer la limite de $\varphi$ en $+\infty$.

3. Déterminer la limite de $\varphi$ en $0^+$.

4. Calculer, pour tout $x$ de $]0;+\infty[$, $\varphi'(x)$.
   On notera $\varphi''$ la dérivée de $\varphi'$ et $\varphi'''$ la dérivée de $\varphi''$.
   Montrer :
   $$\forall x > 0, \quad \varphi''(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}.$$

5. Justifier que $\varphi''$ est croissante sur $]0,+\infty[$ et calculer $\varphi''(1)$. En déduire le tableau de signe de $\varphi''$.

6. En déduire le tableau de variation de $\varphi$ sur $]0,+\infty[$, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.

   On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $\varphi$.

7. Déterminer l'équation de la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

8. Étudier la position relative de $T$ et $\mathcal{C}$. On précisera l'ensemble des points d'intersection.