Devoir surveillé 2

Exercice 1

1. (a)
```
A = (2**5 * 25 * 3**6 * 36) / ((3**4)**2 * 45 * 100)
import numpy as np
B = x/np.sqrt(x)
C = 1/(1-1/(1+1/2))
```

(b)

$$A = \frac{2^5 \times 25 \times 3^6 \times 9 \times 4}{3^8 \times 9 \times 5 \times 25 \times 4} = \frac{2^5 \times 3^6}{3^8 \times 5} = \frac{2^5}{3^2 \times 5} \quad \text{donc} \quad \boxed{A = \frac{32}{45}}$$

$$\boxed{B = \sqrt{x}}$$

$$C = \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} \quad \text{donc} \quad \boxed{C = 3}$$

2. • f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.

• Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{\mathrm{e}^{-x} + 1} = \dfrac{\frac{1}{\mathrm{e}^x} - 1}{\frac{1}{\mathrm{e}^x} + 1} = \dfrac{\frac{1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}}{\frac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}} = \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{-(\mathrm{e}^x - 1)}{1+\mathrm{e}^x} = -f(x)$.

Donc $\boxed{f \text{ est impaire.}}$

3. • Soit $x > 0$. $g(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{4 - x^2} = \dfrac{x^2\left(2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{4}{x^2} - 1\right)} = \dfrac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1}$.

Donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{2}{-1} = -2}$.

• $\lim_{x \to 2^+} (2x^2 + 3x + 1) = 15 > 0$ et $\lim_{x \to 2^+} (4 - x^2) = 0^-$ car

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\boxed{\lim_{x \to 2^+} g(x) = -\infty}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. $h'(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x}\sqrt{x^2+1} + \mathrm{e}^{3x} \times \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$. Donc

$$\boxed{h'(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x}\sqrt{x^2+1} + \frac{x\,\mathrm{e}^{3x}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{3x^2+x+3}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{e}^{3x}.}$$

5. Domaine de définition : $x \mapsto x + 3$ est polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}$.
$x \mapsto \dfrac{4x-2}{x-2}$ est rationnelle donc définie sur $\{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\begin{aligned} x + 3 \leqslant \frac{4x-2}{x-2} &\iff x + 3 - \frac{4x-2}{x-2} \leqslant 0 \\ &\iff \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} - \frac{4x-2}{x-2} \leqslant 0 \\ &\iff \frac{x^2-3x-4}{x-2} \leqslant 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2 - 3x - 4$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$ donc ses racines sont $x_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4$ Or,

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$x^2 - 3x - 4$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x - 2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est }]-\infty, -1] \cup]2, 4].}$

6. (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est (EC) : $x^2 - 4x + 4 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 0$ et (EC) admet une seule racine : $x_0 = 2$. D'après le cours, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu) \times 2^n.$$

Or
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 2 \\ 2\lambda + 2\mu = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(-\frac{1}{2}n + 2\right) \times 2^n.}$

7.
```
def valeur_absolue(x) :
    if x >= 0 :
        return x
    else :
        return -x
```

Exercice 2

Partie 1 - Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n - 1 > 0$.
Initialisation : la relation est vraie au rang 0 car $u_0 - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$;
Hérédité : soit n un entier naturel tel que $u_n - 1 > 0$.
$u_{n+1} - 1 = \dfrac{1 + 2u_n}{2 + u_n} - 1 = \dfrac{1 + 2u_n - 2 - u_n}{2 + u_n} = \dfrac{u_n - 1}{2 + u_n}$.
Or, $u_n - 1 > 0$ et comme $u_n > 1$, $3 + u_n > 4 > 0$. Par quotient, $u_{n+1} - 1 > 0$.
Conclusion : par récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ \ u_n - 1 > 0.}$

2. Quel que soit l'entier naturel n,
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 + 2u_n}{2 + u_n} - u_n = \frac{1 + 2u_n - 2u_n - u_n^2}{2 + u_n} = \frac{1 - u_n^2}{2 + u_n} = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{2 + u_n}.$$
On sait que pour tout n, $1 - u_n < 0$, $u_n + 1 > 0$ et $2 + u_n > 0$. Par produit et quotient, $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

3. (a) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 (d'après la question 1, $u_n > 1$) donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge}}$.
   (b)
   - Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ donc par passage à la limite dans une inégalité, $\boxed{\ell \geqslant 1}$.
   - Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1 + 2u_n}{2 + u_n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ d'après le cours et par opérations $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 + 2u_n}{2 + u_n} = \dfrac{1 + 2\ell}{2 + \ell}$. Donc $\boxed{\ell = \dfrac{1 + 2\ell}{2 + \ell}}$.

   (c) On a $\ell = \dfrac{1 + 2\ell}{2 + \ell}$ donc $\ell(2 + \ell) = 1 + 2\ell$ et donc $\ell^2 = 1$. Ceci donne $\ell = -1$ ou $\ell = 1$. Or, on sait aussi que $\ell \geqslant 1$. Donc $\boxed{\ell = 1}$.

Partie 2 - Étude d'une suite dépendant de $(u_n)_{n\in N}$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = 1 \Leftrightarrow \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = 1 \Leftrightarrow u_n - 1 = u_n + 1 \Leftrightarrow -1 = 1$$
Puisque la dernière égalité est fausse, la première également. On a donc $v_n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Méthode 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \quad &\text{donc} \quad v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \\ &\text{donc} \quad v_n u_n + v_n = u_n - 1 \\ &\text{donc} \quad v_n u_n - u_n + = -1 - v_n \\ &\text{donc} \quad u_n(v_n - 1) = -1 - v_n \\ &\text{donc} \quad u_n = \frac{-1 - v_n}{v_n - 1} \qquad \text{car } v_n \neq 1 \\ &\text{donc} \quad u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}. \end{aligned}$$
Méthode 2 :
$$\frac{1 + v_n}{1 - v_n} = \frac{1 + \frac{u_n - 1}{u_n + 1}}{1 - \frac{u_n - 1}{u_n + 1}} = \frac{\frac{2u_n}{u_n + 1}}{\frac{2}{u_n + 1}} = \frac{2u_n}{2} = u_n$$
Conclusion : $\boxed{u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}}$.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{\frac{1 + 2u_n}{2 + u_n} - 1}{\frac{1 + 2u_n}{2 + u_n} + 1} = \dfrac{u_n - 1}{3 + 3u_n} = \dfrac{u_n - 1}{3(1 + u_n)} = \dfrac{1}{3}v_n$.
$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc géométrique de raison } \dfrac{1}{3}.}$

(b) On a $v_0 = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$. On sait qu'alors pour tout naturel n, $\boxed{v_n = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}.}$ Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \dfrac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}}$

6. Puisque $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.}$

Exercice 3

Partie 1 - Étude d'une fonction

1. $x \mapsto x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par produit $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$

2. Par croissance comparée, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0.}$

   De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$

3. (a) Soit $x > 0$.
$$\ln(x) + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant -1 \Leftrightarrow \exp(\ln(x)) \geqslant \exp(-1)$$
car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a donc
$$\ln(x) + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}.$$
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right[.}$

   (b) Par produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $x > 0$. $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$.
La question précédente permet de déduire le signe de $f'(x)$. On a donc

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| 0	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

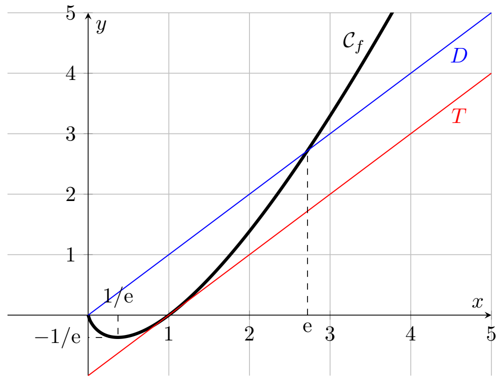
4. $f'(1) = \ln(1) + 1 = 1$ et $f(1) = \ln(1) = 0$ donc $f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1$ et l'équation de T est $\boxed{y = x - 1}$.

5. Soit $x > 0$. $f(x) - x = x\ln(x) - x = x(\ln(x) - 1)$.
Or $x > 0$ donc $f(x) - x$ est du signe de $\ln(x) - 1$. De plus, par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$
$$\ln(x) - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant 1 \Leftrightarrow \exp(\ln(x)) \geqslant \exp(1) \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}\,.$$
On a le signe suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f(x) - x$	||	$-$	0	$+$	

Conclusion : $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de } D \text{ sur }]0, \mathrm{e}] \text{ et au dessus sur } [\mathrm{e}, +\infty[.}$
Elles se coupent à l'abscisse $x = \mathrm{e}$.

6.



Partie 2 - Étude d'une suite récurrente

7.
```python
import numpy as np
def suite_u(n):
    u = 3
    for k in range(n):
        u = u * np.log(u)
    return u
```

8. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \mathrm{e}$.

   Initialisation : $u_0 = 3 \geqslant \mathrm{e}$ car $2 < \mathrm{e} < 3$.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant \mathrm{e}$.

   Alors $\ln(u_n) \geqslant \ln(e) = 1$ par stricte croissance de ln sur $]0, +\infty[$. Par produit d'inéglités de nombres positifs, $u_n \ln(u_n) \geqslant \mathrm{e} \times 1$ donc $u_{n+1} \geqslant \mathrm{e}$.

   Conclusion, d'après le principe de récurrence, $\boxed{u_n \geqslant \mathrm{e} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Méthode 1 : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 0$ car $u_n \in [\mathrm{e}, +\infty[$ (question 5).
   Méthode 2 : $u_{n+1} - u_n = u_n \ln(u_n) - u_n = u_n(\ln(u_n) - 1) \geqslant 0$ car $u_n \geqslant 0$ et $\ln(u_n) \geqslant 1$ (vu à la question précédente).
   Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

10. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, le théorème de la limite monotone nous dit que soit (u_n) converge, soit elle tend vers $+\infty$. Supposons, par l'absurde, que (u_n) converge, vers un réel ℓ.

    - Par croissance, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0 = 3$ donc, par passage à la limite, $\ell \geqslant 3$.
    - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \ln(u_n)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \ln(u_n) = \ell \ln(\ell)$ car $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $\ell = \ell \ln(\ell)$ donc $1 = \ln(\ell)$ (car $\ell \neq 0$) et donc $\ell = \mathrm{e}$.

    Ceci est absurde car $\ell \geqslant 3 > \mathrm{e}$.
    Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

Exercice 4

1. Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc par composée, $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Par produit, puis différence, on en déduit que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

2. Soit $x > 0$. $\varphi(x) = \mathrm{e}^x \left(1 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$.

   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^0 = 1$. Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.}$

3. Soit $x > 0$. $\varphi(x) = \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. $\lim\limits_{x\to0^+} \mathrm{e}^x = 1$ et en posant $X = \frac{1}{x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$, on a : $x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissance comparée. Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} \varphi(x) = -\infty}$.

4. Soit $x > 0$.

$$\varphi'(x) = \mathrm{e}^x - \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

$$\varphi''(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

$$\varphi'''(x) = \mathrm{e}^x - \left(-\frac{3}{x^4}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$$

5. Pour $x > 0$, $\mathrm{e}^x > 0$, $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > 0$, $3x + 1 > 0$ et $x^5 > 0$, donc $\varphi'''(x) > 0$. On en déduit que φ'' est <u>croissante</u> sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $\boxed{\varphi''(1) = \mathrm{e} - \mathrm{e} = 0}$. On en déduit que :

x	0		1		$+\infty$
$\varphi''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

6. D'après le signe de φ'', φ' est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$. Elle admet donc un minimum en $x = 1$ qui vaut $\varphi'(1) = \mathrm{e}$. Ainsi, $\boxed{\varphi'(x) \geqslant \mathrm{e} \text{ pour tout } x > 0.}$ En particulier, $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x > 0$, donc $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

x	0	1	$+\infty$
φ	‖ $-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

7. $\varphi(1) = 0$ et $\varphi'(1) = \mathrm{e}$, donc la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation $\boxed{T : y = \mathrm{e}(x - 1).}$

8. Posons $h(x) = \varphi(x) - \mathrm{e}(x - 1)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par différence et pour tout $x > 0$, $h'(x) = \varphi'(x) - \mathrm{e} \geqslant 0$ d'après la question 4. h est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h(1) = 0$.

   - pour $x \in]0, 1]$, $x \leqslant 1$ donc $h(x) \leqslant h(1) = 0$: $\boxed{\mathcal{C} \text{ est en dessous de } T \text{ sur }]0, 1]}$;
   - pour $x \in [1, +\infty[$, $x \geqslant 1$ donc $h(x) \geqslant h(1) = 0$: $\boxed{\mathcal{C} \text{ est au dessus de } T \text{ sur } [1, +\infty[}$;
   - $\boxed{\mathcal{C} \text{ et } T \text{ se coupent au point d'abscisse 1}}$.