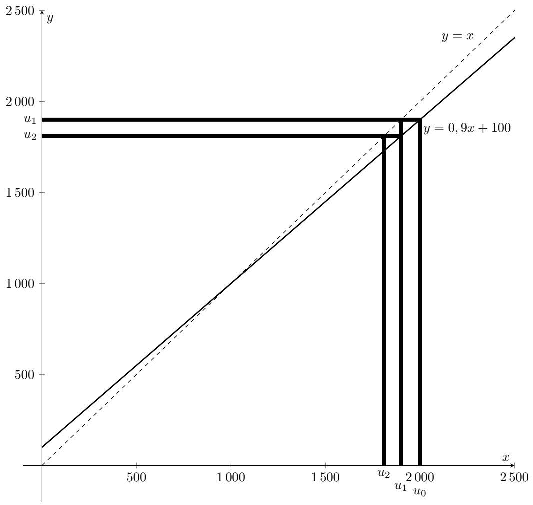
Devoir surveillé 1 - Corrigé

Exercice 1

1. $\boxed{u_0 = 2000}$

2.



3. $u_1 = 0,9u_0 + 100 = 09 \times 2000 + 100$ donc $\boxed{u_1 = 1900}$
   et $u_2 = 0,9u_1 + 100 = 09 \times 1900 + 100$ donc $\boxed{u_2 = 1810}$.

4. $2025 = 2022+3$ donc il faut calculer u_3 : $u_3 = 0,9u_2+100 = 09\times1810+100 = 1729$.
   $\boxed{\text{Au premier janvier 2025, il y aura 1729 pommiers.}}$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $$v_{n+1} = u_{n+1}-1000 = 0,9u_n-900 = 0,9(v_n+1000)-900 = 0,9v_n+900-900 = 0,9v_n.$$
   Donc $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison 0,9}}$ et de premier terme $\boxed{v_0 = u_0 - 1000 = 1000.}$

   (b) Par propriété de cours, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
   $$\boxed{v_n = v_0 \times (0,9)^n = 1000 \times (0,9)^n.}$$

   (c) Puisque $u_n = v_n+1000$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{u_n = 1000 + 1000 \times (0,9)^n}$.

6. $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,9)^n = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1000$.
   $\boxed{\text{Le nombre de pommiers va tendre vers 1000.}}$

Exercice 2

1. Résolvons $x^2 - x - 2 = 0$: le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$ donc l'équation a deux solutions, $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$.
   $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } x^2 - x - 2 = 0 \text{ est } \{-1, 2\}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2-x-2) - (2x-1)(x^2-5)}{(x^2-x-2)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 2x^2 - 4x - (2x^3 - 10x - x^2 + 5)}{(x^2-x-2)^2} \\ &= \frac{-x^2+6x-5}{(x^2-x-2)^2}. \end{aligned}$$

3. Résolvons $-x^2 + 6x - 5 = 0$: $\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 36 - 20 = 16 > 0$ donc cette équation a deux solutions, $x_1 = \dfrac{-6-\sqrt{16}}{-2} = 5$ et $x_2 = \dfrac{-6+\sqrt{16}}{-2} = 1$.

   On a aussi $f(1) = \dfrac{1-5}{1-1-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2$ et $f(5) = \dfrac{25-5}{25-5-2} = \dfrac{20}{18} = \dfrac{10}{9}$.

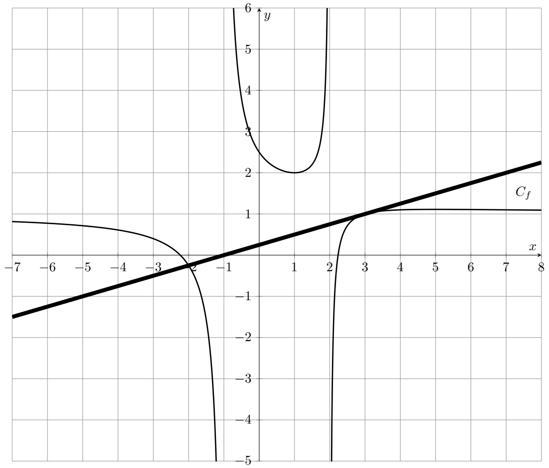
x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$-x^2+6x-5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(x^2-x-2)^2$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$\frac{10}{9}$	$\searrow$	1

(a) T a pour équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ avec $a = 3$ ici. $f(3) = \dfrac{9-5}{9-3-2} = 1$ et $f'(3) = \dfrac{-9+18-5}{(9-3-2)^2} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

On a donc : $f'(3)(x-3)+f(3) = \dfrac{1}{4}(x-3)+1 = \dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}$.

$\boxed{T \text{ a pour équation } y = \dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}}$.

(b)



4. • Avec l'axe des abscisses. On résout $f(x) = 0$, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5}.$$

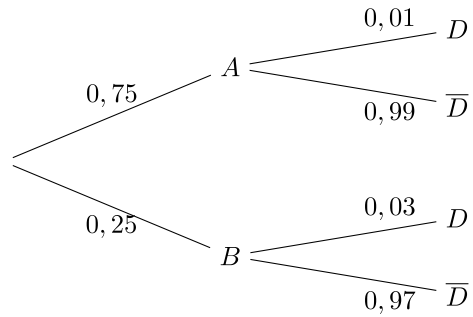
$\boxed{\text{Il y a deux points d'intersection avec } (Ox), \text{ de coordonnées } (\sqrt{5}, 0) \text{ et } (-\sqrt{5}, 0)}$.

• Avec l'axe des ordonnées. $f(0) = \dfrac{-5}{-2} = \dfrac{5}{2}$.

$\boxed{\text{Il y a un point d'intersection avec } (Oy), \text{ de coordonnées } \left(0, \dfrac{5}{2}\right)}$.

Exercice 3

1.



2. A et B forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(D) = P(A)P_A(D) + P(B)P_B(D) = 0,75 \times 0,01 = 0,25 \times 0,03.$$

On a : $\boxed{P(D) = 0,015}$.

3. $P_D(A) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(A) \times P_A(D)}{P(D)} = \dfrac{0,75 \times 0,01}{0,015} = 0,5$
et $P_D(B) = P_D(\overline{A}) = 1 - P_D(A) = 0,5$. Donc $\boxed{P_D(A) = P_D(B) = 0,5}$.

4. Puisque $P_D(A) = P_D(B)$, si la pièce est défectueuse, $\boxed{\text{elle a autant de chance de venir de } A \text{ que de } B.}$

5. On souhaite ici comparer $P_{\overline{D}}(A)$ et $P_{\overline{D}}(B)$.

$P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \dfrac{P(A) \times P_A(\overline{D})}{P(\overline{D})} = \dfrac{0,75 \times 0,99}{P(\overline{D})} = \dfrac{0,7425}{P(\overline{D})}$

et $P_{\overline{D}}(B) = \dfrac{P(B) \times P_B(\overline{D})}{P(\overline{D})} = \dfrac{0,25 \times 0,97}{P(\overline{D})} = \dfrac{0,2425}{P(\overline{D})}$.

Puisque $0,7425 > 0,2425$, on a $P_{\overline{D}}(A) > P_{\overline{D}}(B)$.

Si la pièce est conforme, elle a plus de chance de venir de A.

Exercice 4

1. Pour $x \geqslant 0$, $f'(x) = 50\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1} + 50x \times \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1} = (50-25x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1}$.

   Puisque $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $50-25x$, avec

   $$50-25x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

   On a aussi $f(0) = 0$ et $f(2) = 100\,\mathrm{e}^0 = 100$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	100	$\searrow$	0

2. Le taux d'hydratation est maximal au bout de $2h$.

3. Remarquons que f est continue sur $[0,+\infty[$ car elle y est dérivable.

   - Sur $[0,2]$, f est continue et strictement croissante. De plus $f(0) = 0$ et $f(1) = 50\,\mathrm{e}^{1/2} \approx 82,4$ donc $50 \in [f(0), f(1)]$. On en déduit que l'équation $f(x) = 50$ admet une unique solution sur $[0,2]$ et que celle-ci est dans l'intervalle $[0,1]$.
   - Sur $[2,+\infty]$, f est continue et strictement décroissante. De plus $f(5) \approx 55,8$ et $f(5,5) \approx 47,8$ donc $50 \in [f(5,5); f(5)]$. On en déduit que l'équation $f(x) = 50$ admet une unique solution sur $[2,+\infty[$ et que celle-ci est dans l'intervalle $[5;5,5]$.

4. Le taux d'hydratation est supérieur à 50% pendant au maximum 5h30, entre les deux solutions de l'équation $f(x) = 50$. Donc la crème ne convient pas.

5. Soit $x \in [0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f(x) = x &\Leftrightarrow 50x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1} = x \\
&\Leftrightarrow 50x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1} - x = 0 \\
&\Leftrightarrow x\left(50\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1} - 1\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 50\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1} - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1} = \frac{1}{50} \\
&\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2}x + 1 = \ln\left(\frac{1}{50}\right) \\
&\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2}x = -\ln(50) - 1 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2\ln(50) + 2
\end{aligned}$$

Leus deux solutions trouvées sont bien dans $[0,+\infty[$.

Il y a donc deux points d'intersection : $(0;0)$ et $(2\ln(50)+2\ ;\ 2\ln(50)+2)$.