DEVOIR MAISON 7

À rendre le mardi 1^er^ février 2022

Exercice 1

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x+2y, 3x+y) \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(1,2,3)$.
2. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(1,0,-1)$.
3. L'application φ est-elle surjective ?
4. L'application φ est-elle injective ?
5. Démontrer que l'ensemble image de φ est

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b-c=0\}.$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x, \;\; f(x) = e^x - e^{-x}.$$

On note C_f la courbe représentative de f.

1. Donner le domaine de définition de f et étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?
2. Construire le tableau de variation de f (complet bien sûr).
3. Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0. On note cette droite T.
5. Construire sur un même schéma C_f et T.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère dans cette question l'équation (E_n) d'inconnue x : $f(x) = n$.
   (a) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution notée u_n (on ne cherchera pas ici à calculer u_n).
   (b) Préciser la valeur de u_0.
   (c) Comparer $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$. En déduire le sens de monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que $u_n \geqslant \ln(n)$. Quelle est la limte de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?
   (e) Soit n un entier naturel. Montrer que l'équation : $x^2 - nx - 1 = 0$ admet deux solutions réelles que l'on déterminera et dont on précisera les signes.
   (f) À l'aide du changement de variable $t = e^x$, déterminer la solution u_n de l'équation (E_n) pour n entier naturel.