Devoir maison 6 – Corrigé

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1}$.

1. $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc par quotient, f est définie sur
$$\{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{e}^x - 1 \neq 0\}.$$
Or $\mathrm{e}^x - 1 = 0 \Longleftarrow \mathrm{e}^x = 1 \Longleftarrow x = 0$. Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*}$.

2. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$ qui est symétrique par rapport à 0.
Pour $x \in \mathbb{R}^*$.
$$f(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} + 1}{\mathrm{e}^{-x} - 1} = \frac{(\mathrm{e}^{-x} + 1)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^{-x} - 1)\,\mathrm{e}^x} = \frac{1 + \mathrm{e}^x}{1 - \mathrm{e}^x} = \frac{1 + \mathrm{e}^x}{-(\mathrm{e}^x - 1)} = -\frac{1 + \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} = -f(x)$$
Donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

3.
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{1}{-1} = -1}$.
   - Puisque f est impaire, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1}$.
   - Soit $x > 0$. On a $\mathrm{e}^x > 1$ donc $\mathrm{e}^x - 1 > 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} (\mathrm{e}^x - 1) = 0^+$. De plus $\lim\limits_{x \to 0^+} (\mathrm{e}^x + 1) = 2$. Par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$.
   - En utilisant de nouveau la parité, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty}$.

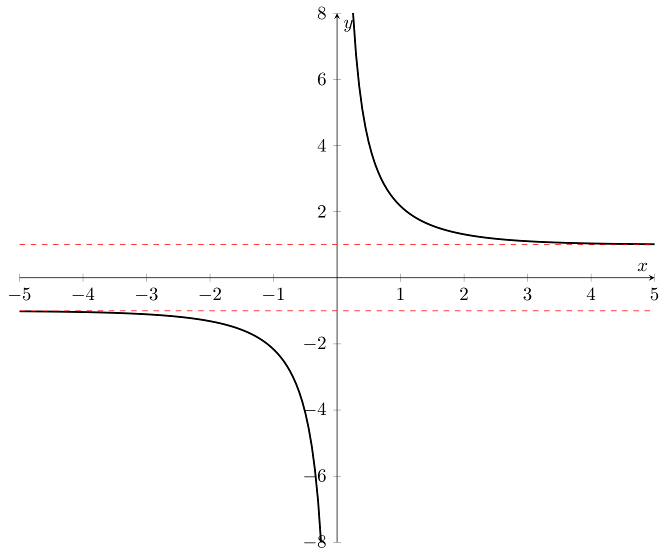
4. Les droites d'équation $y = -1$ et $y = 1$ sont asymptotes horizontales à la courbe de f respectivement au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de f, à gauche et à droite.

5. $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$ ne s'y annule pas donc par quotient, f est dérivable $\mathbb{R}^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1) - \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1)}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{-2\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} < 0$$
car $\mathrm{e}^x > 0$ et $(\mathrm{e}^x - 1)^2 > 0$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty, 0[\text{ et sur }]0, +\infty[}$.
Attention : pas sur $\mathbb{R}^*$!!

6.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

7.



Exercice 2

On considère la fonction $g : x \mapsto x+1-\ln(x+1)$.

1. $x \mapsto x+1$ est affine donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composée et somme, g est définie et dérivable sur $\{x \in \mathbb{R} \mid x+1 > 0\}$.
   Donc $\boxed{g \text{ est définie et dérivable sur }]-1,+\infty[}$.

2. - $\lim\limits_{x\to -1}(x+1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$ donc par composée $\lim\limits_{x\to -1}\ln(x+1) = -\infty$.
     Par combinaison linéaire, $\boxed{\lim\limits_{x\to -1} g(x) = +\infty}$.
   - Posons $X = x+1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   $$g(x) = X - \ln(X) = X\left(1 - \frac{\ln(X)}{X}\right).$$
     Or, $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln(X)}{X} = 0$ par croissance comparée donc par somme puis produit, $\lim\limits_{X\to+\infty} X\left(1-\frac{\ln(X)}{X}\right) = +\infty$, ce qui signifie $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

3. On a déjà vu (question 1) que g est dérivable sur $]-1,+\infty[$. Soit $x > -1$.
   $$g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$
   Or $x+1 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de x.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
g	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   $\boxed{g \text{ est décroissante sur }]-1,0] \text{ et croissante sur } [0,+\infty[}$.

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
   $$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$
   (a) Initialisation : $u_0 = 1$ existe bien et $2 < \mathrm{e} < 3$ donc $\mathrm{e}-1 > 1$ donc $1 \leqslant u_0 \leqslant \mathrm{e}-1$.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}-1$.
   $u_{n+1} = g(u_n)$ existe car $u_n \in]-1,+\infty[$.
   De plus, on sait que g est croissante sur $[0,+\infty[$ donc puisque $0 \leqslant 1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}-1$,
   $$g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(\mathrm{e}-1).$$
   Or $g(0) = 1$, $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(\mathrm{e}-1) = \mathrm{e} - \ln(\mathrm{e}) = \mathrm{e}-1$.
   Donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}-1$.
   Conclusion : d'après le principe de récurrence,
   $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe bien et } 1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}-1.}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $$u_{n+1} - u_n = u_n + 1 - \ln(u_n+1) - u_n = 1 - \ln(u_n+1).$$
   Or $u_n \leqslant \mathrm{e}-1$, donc $u_n + 1 \leqslant \mathrm{e}$. Par croissance de ln, $\ln(u_n+1) \leqslant \ln(\mathrm{e}) = 1$.
   Donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

   (c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\mathrm{e}-1$ donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}-1$ donc par passage à la limite, $1 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{e}-1$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 1 - \ln(u_n+1)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. Puisque $\ell + 1 > 0$, on a par passage à la limite
   $$\ell = \ell + 1 - \ln(\ell+1) \text{ donc } \ln(\ell+1) = 1 \text{ donc } \ell + 1 = \mathrm{e}$$
     et ainsi, $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers le réel } \ell = \mathrm{e}-1}$.