Devoir maison 6

À rendre le mardi 14 décembre 2021

Justifiez précisément. Donnez toujours un nom aux événements considérés et citez les formules utilisées avant de passer à l'application numérique.

Exercice 1

Une famille de n, $n \geqslant 2$, personnes décide de s'échanger des cadeaux en cette période de fêtes de fin d'année. Chacun prépare un cadeau et ceux-ci sont mélangés dans une hotte.

1. Chaque participant, du plus jeune au plus âgé, tire successivement et au hasard un cadeau dans la hotte. Une personne peut donc, dans cette situation, tirer au sort son propre cadeau.
   (a) Modéliser l'expérience : on précisera l'univers, son cardinal, s'il y a équiprobabilité.
   (b) Quelle est la probabilité que la dernière personne (la plus agée donc) tombe sur son cadeau ?
2. Puisqu'une personne n'était pas censée repartir avec le cadeau qu'elle a apporté on introduit une nouvelle règle :
   - tout le monde sait reconnaître son cadeau ;
   - les $(n-1)$ premières personnes tirent successivement et au hasard un cadeau dans la hotte en prenant soin d'écarter le cadeau apporté (s'il est toujours disponible) ;
   - la dernière personne a le cadeau restant.

   La dernière personne n'ayant pas le choix, on se demande quelle est la probabilité qu'elle tombe sur son cadeau.

   (a) Pour commencer, supposons que la famille ne contient que trois personnes ($n = 3$). Lister les répartitions des cadeaux possibles. A-t-on équiprobabilité ? Calculer la probabilité que la troisième personne tombe sur son cadeau.
   On pourra noter $A_{i,j}$ l'événement « la personne n° i choisit le cadeau de la personne n° j »
   (b) Traiter le cas de 4 personnes.

Exercice 2

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires indiscernables au toucher.
On effectue une série de tirages d'une boule en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans U ;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;
- si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans l'autre urne ;
- si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans la même urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera

- U_n l'événement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U » ;
- V_n l'événement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne V » ;
- B_n l'événement « la n-ième boule est blanche » ;
- N_n l'événement « la n-ième boule est blanche ».

On a $P(U_1) = 1$.

1. (a) Calculer $P(U_2)$.
   (b) Calculer $P(U_3)$.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir trois boules blanches lors des trois premiers tirages.
3. Une personne arrive à l'issue du deuxième tirage et sait simplement que la boule qui vient d'être tirée est blanche. Quelle est la probabilité que le deuxième tirage ait eu lieu dans l'urne U ?
4. (a) Démontrer en utilisant la formule des probabilités totales que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P(U_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n)$$
   (b) Écrire alors une fonction python prenant en entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de $P(U_n)$, en utilisant cette relation.
5. Déterminer alors la valeur de $p_n = P(U_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Déterminer $P(B_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$