Devoir maison 6 - Corrigé

Exercice 1

1. (a) On considère que les personnes (et le cadeau qu'elles ont apporté) sont numérotées de 1 à n. L'univers est Ω. Un tirage possible est donné par :
   - le numéro du cadeau tiré par la personne n° 1 : n possibilités,
   - puis le numéro du cadeau de la personne n° 2 : $n-1$ possibilités,
   - etc.
   - enfin, la dernière personne tire son cadeau : il ne reste plus qu'une seule possibilité.

   Ainsi, $\boxed{\text{Card}(\Omega) = n(n-1) \times \cdots \times 1 = n!}$. Tous les tirages (événements élémentaires) sont équiprobables. On munit donc Ω de la probabilité uniforme P.

   (b) Soit A l'événement « la dernière personne tombe sur son cadeau ». Pour avoir un tirage de A, il faut :
   - que les personnes de 1 à $n-1$ choisissent un cadeau parmi les numéros 1 à $n-1$. En raisonnant comme pour Ω, il y a $(n-1)!$ possibilités ;
   - puis que la dernière personne choisisse le cadeau n° n : 1 seule possibilité.

   Ainsi , $\text{Card}(A) = (n-1)! \times 1 = (n-1)!$. Donc, par probabilité uniforme,
$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}}.$$

2. (a) $n = 3$.
   Les répartitions possibles sont :

Personne	Cadeau
1	2
2	3
3	1

Personne	Cadeau
1	2
2	1
3	3

Personne	Cadeau
1	3
2	1
3	2

   Ces tirages ne sont pas forcément équiprobables. Soit toujours A l'événement « la dernière personne tombe sur son cadeau ». Cela correspond au cas du milieu. Notons $A_{i,j}$ l'événement « la personne n° i choisit le cadeau de la personne n° j ». $A = A_{3,3} = A_{1,2} \cap A_{2,1} \cap A_{3,3}$. D'après la formule des probabilités composées,
$$P(A) = P(A_{1,2}) P_{A_{1,2}}(A_{2,1}) P_{A_{1,2}\cap A_{2,1}}(A_{3,3})$$
   Or, $P(A_{1,2}) = \frac{1}{2}$ car la personne n° 1 choisit entre les cadeaux 2 et 3.
   $P_{A_{1,2}}(A_{2,1}) = \frac{1}{2}$ car il reste les cadeaux 1 et 3 et la personne n° 2 choisit au hasard entre ces deux cadeaux ;
   $P_{A_{1,2}\cap A_{2,1}}(A_{3,3}) = 1$ car la troisième personne n'a pas le choix.
$$\boxed{P(A) = \frac{1}{4}}$$
   Ceci montre que la probabilité n'est pas uniforme car sinon, les trois événements élémentaires seraient de probabilité $\frac{1}{3}$.

   (b) $n = 4$. $A = B \cup C$ avec

Cas B

Personne	Cadeau
1	2
2	3
3	1
4	4

Cas C

Personne	Cadeau
1	3
2	1
3	2
4	4

   $B = A_{1,2} \cap A_{2,3} \cap A_{3,1} \cap A_{4,4}$. D'après la formule des probabilités composées,
$$P(B) = P(A_{1,2}) P_{A_{1,2}}(A_{2,3}) P_{A_{1,2}\cap A_{2,3}}(A_{3,1}) P_{A_{1,2}\cap A_{2,3}\cap A_{3,1}}(A_{4,4})$$
   Or, $P(A_{1,2}) = \frac{1}{3}$ car la personne n° 1 choisit entre les cadeaux 2, 3, 4 ;
   $P_{A_{1,2}}(A_{2,3}) = \frac{1}{3}$ car le cadeau 2 a été pris et la personne n° 2 choisit entre les cadeaux 1,3,4 ;
   $P_{A_{1,2}\cap A_{2,3}}(A_{3,1}) = \frac{1}{2}$ car les cadeaux 2 et 3 ont été pris et la personne n° 3 choisit entre les cadeaux 1 et 4 ;
   $P_{A_{1,2}\cap A_{2,3}\cap A_{3,1}}(A_{4,4}) = 1$.
$$P(B) = \frac{1}{18}$$
   De même
$$P(C) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{12}$$
   Puisque B et C sont incompatibles, $P(A) = P(B) + P(C)$. On en déduit que
$$\boxed{P(A) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{5}{36}}$$
   C'est inférieur au cas $n = 3$. Avec 4 personnes, il y a moins de risque que la dernière personne tombe sur son cadeau.

Exercice 2

1. (a) Le premier tirage ayant lieu dans U, le deuxième aura lieu dans U si et seulement si on tire une boule noire au premier tirage. Ainsi, $U_2 = U_1 \cap N_1$. Donc
$$\boxed{P(U_2) = P(U_1) \times P_{U_1}(N_1) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}}$$
(b) (U_2, V_2) est un système complet d'événements non négligeables. D'après la formule des probabilités totales,
$$P(U_3) = P(U_2)P_{U_2}(U_3) + P(V_2)P_{V_2}(U_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$$
$$\boxed{P(U_3) = \frac{5}{18}}$$

2. On cherche $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$. D'après la formule des probabilités composées
$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_2}(B_3) = P_{U_1}(B_1)P_{V_2}(B_2)P_{U_3}(B_3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$
car ici on commence dans l'urne U puis on change d'urne à chaque tirage.
$$\boxed{P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{1}{9}.}$$

3. On cherche $P_{B_2}(U_2)$. D'après la formule de Bayes
$$P_{B_2}(U_2) = \frac{P(U_2)P_{U_2}(B_2)}{P(B_2)}.$$
Or, $P(U_2) = \frac{1}{3}$, $P_{U_2}(B_2) = \frac{2}{3}$. Cherchons $P(B_2)$. D'après la formule des probabilités totales (comme en 1b)
$$P(B_2) = P(U_2)P_{U_2}(B_2) + P(V_2)P_{V_2}(B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{18}.$$
Donc
$$\boxed{P_{B_2}(U_2) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7}.}$$

4. (a) (U_n, V_n) est un système complet d'événements non négligeables. D'après la formule des probabilités totales,
$$P(U_{n+1}) = P(U_n)P_{U_n}(U_{n+1}) + P(V_n)P_{V_n}(U_{n+1})$$
Or $P_{U_n}(U_{n+1}) = P_{U_n}(N_n) = \frac{1}{3}$ car, si U_n est réalisé, U_{n+1} signifie que l'on ne change pas d'urne.
$P_{V_n}(U_{n+1}) = P_{V_n}(B_n) = \frac{1}{4}$ car, si V_n est réalisé, U_{n+1} signifie que l'on change d'urne.
Donc
$$\boxed{P(U_{n+1}) = \frac{1}{3}P(U_n) + \frac{1}{4}(1 - P(U_n)) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n)}.$$
(b)
```python
def PU(n) :
    p = 1  # P(U1)
    for k in range(1, n) : # ou range(0,n-1)
        p = 1/4 + 1/12*p
    return(p)
```

5. La suite (p_n) est arithmético-géométrique.
$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}x \Leftrightarrow 12x = 3 + x \Leftrightarrow 11x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{11}$$
Posons alors $v_n = p_n - \frac{3}{11}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
$$v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}p_n - \frac{3}{11} = \frac{1}{12}\left(v_n + \frac{3}{4}\right)\frac{1}{44} = \frac{1}{12}v_n$$
La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $v_1 = p_1 - \frac{3}{11} = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$.
On en déduit que $\boxed{p_n = v_n + \frac{3}{11} = \frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + \frac{3}{11}}$

6. En reprenant le raisonnement de la question 4a,
$$P(B_n) = P(U_n)P_{U_n}(B_n) + P(V_n)P_{V_n}(B_n) = p_n \times \frac{2}{3} + (1 - p_n) \times \frac{1}{4} = \frac{5}{12}p_n + \frac{1}{4}$$
Donc
$$\boxed{P(B_n) = \frac{40}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{4}{11}}$$