Devoir maison 5

À rendre le mardi 22 novembre 2022

Dans ce problème, on se propose de déterminer, en utilisant le calcul matriciel, le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = -2,\ u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n \end{cases}$

Partie 1- Écriture matricielle

Soient $A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 1 & -6 & 12 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout n, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Démontrer *soigneusement* que, pour tout n, $X_n = A^n X_0$.

Partie 2- Calcul des puissances de A

On considèrera les matrices :

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 16 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 8 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et exprimer P^{-1} à l'aide de Q.
4. Vérifier que $A = PTP^{-1}$. *On fera apparaître les calculs intermédiaires.*
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

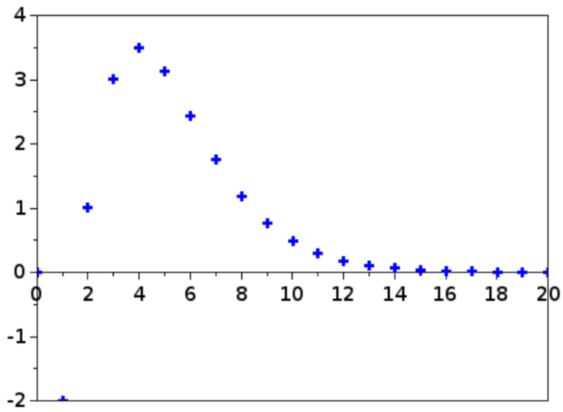
$$A^n = \frac{1}{2^{n+3}}\begin{pmatrix} 4(n-2)(n-1) & -16n(n-2) & 16n(n-1) \\ 2n(n-1) & 8(1-n^2) & 8n(n+1) \\ n(n+1) & -4n(n+2) & 4(n+1)(n+2) \end{pmatrix}$$

Partie 3- Expression et étude de la suite (u_n)

8. (a) Recopier et compléter le programme python suivant qui, étant donné un entier naturel n, doit afficher la valeur de u_n.

```python
# n entier naturel donné
X = [0, -2, 1]
for k in range(...) :
    u = ...
    X[0] = ...
    X[1] = ...
    X[2] = ...
print(...)
```

(b) On a utilisé ce programme pour tracer les premiers termes de cette suite, de u_0 à u_{20}.



Que peut-on conjecturer (on sera le plus précis possible) :

- sur la monotonie de la suite (u_n) ?
- sur la limite éventuelle de la suite (u_n) ?

9. Déduire des parties précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3n^2 - 5n}{2^{n-1}}$.

10. Étudier la limite de (u_n).

11. Écrire un programme python qui détermine le plus petit entier naturel $n \geqslant 2$ tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$. On pourra utiliser la fonction de la question 8.

12. Montrer que (u_n) est monotone à partir d'un certain rang n_0 que l'on précisera.