Devoir maison 5 – Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$AX_n = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 1 & -6 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8u_{n+1} \\ 8u_{n+2} \\ 12u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

2. On montre par récurrence que, pour tout n, $X_n = A^n X_0$:
Initialisation : pour $n = 0$, $A^0 = I_3$, donc on a bien $X_0 = A^0 X_0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = A^n X_0$. Alors $X_{n+1} = AX_n = A^{n+1}X_0$.
D'après le principe de récurrence, $\boxed{X_n = A^n X_0 \text{ pour tout entier naturel } n.}$

3. $PQ = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 16I_3$. Donc $P\left(\frac{1}{16}Q\right) = I_3$. On en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{16}Q.}$

4. $PT = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 16 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \end{pmatrix}$
$$PTP^{-1} = \frac{1}{16}PTQ = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 8 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \\ 2 & -12 & 24 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 1 & -6 & 12 \end{pmatrix} = A$$
Donc $\boxed{A = PTP^{-1}.}$

5. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$, par récurrence sur n.
Initialisation : si $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $PT^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. Donc la relation est vraie au rang 0.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PT^nP^{-1}$.
Alors $A^{n+1} = A^nA = PT^nP^{-1}PTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$. Donc la relation est héréditaire.
D'après le principe de récurrence, $\boxed{A^n = PT^nP^{-1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

6. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, par récurrence sur n.
Initialisation : pour $n = 0$,
$$\frac{1}{2^0}\begin{pmatrix} 1 & 2\times 0 & 2\times 0\times(-1) \\ 0 & 1 & 2\times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = T^0.$$
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$$T^{n+1} = T^nT = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1+n & 2n+n(n-1) \\ 0 & \frac{1}{2} & 1+n \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
donc
$$T^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}\begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) & 2n(n+1) \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Conclusion : d'après le principe de récurrence,
on a $\boxed{T^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

7. On sait que $A^n = PT^nP^{-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi,
$$A^n = \frac{1}{16\times 2^n}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 16 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 8 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A^n = \frac{1}{2^{n+4}}\begin{pmatrix} 8(n-2)(n-1) & -32n(n-2) & 32n(n-1) \\ 4n(n-1) & 16(1-n^2) & 16n(n+1) \\ 2n(n+1) & -8n(n+2) & 8(n+1)(n+2) \end{pmatrix}$$
$$A^n = \frac{1}{2^{n+3}}\begin{pmatrix} 4(n-2)(n-1) & -16n(n-2) & 16n(n-1) \\ 2n(n-1) & 8(1-n^2) & 8n(n+1) \\ n(n+1) & -4n(n+2) & 4(n+1)(n+2) \end{pmatrix}$$

8. (a)

```
X = [0, -2, 1]
for k in range(n) :
    u = 3/2*X[2] - 3/4*X[1]+1/8*X[0]
    X[0] = X[1]
    X[1] = X[2]
    X[2] = u
print(X[0])
```

(b) On peut conjecture que (u_n) n'est pas monotone, mais semble décroissante à partir du rang 4. De plus, (u_n) semble converger vers 0.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^{n+3}} \begin{pmatrix} 32n(n-2)+16n(n-1) \\ * \\ * \end{pmatrix}$.

Le 1[er] coefficient est u_n. On en déduit : $\boxed{u_n = \dfrac{32n(n-2)+16n(n-1)}{2^{n+3}} = \dfrac{n(3n-5)}{2^{n-1}}.}$

10. $u_n = \dfrac{3n^2}{2^{n-1}} - \dfrac{5n}{2^{n-1}} = 6 \times \dfrac{n^2}{2^n} - 10 \times \dfrac{n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par combinaison linéaire de croissances comparées. On a bien $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} = u_n = 0}$

11.

```
n = 2
u = 1
while u > 0.001 :
  n = n + 1
  u = (3*n**2-5*n)/(2**(n-1))
print(n)
```

12. Montrons que (u_n) est décroissante à partie du rang 4 (d'après notre conjecture). Soit $n \geqslant 4$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)(3(n+1)-5)}{2^n} - \frac{n(3n-5)}{2^{n-1}} = \frac{-3n^2+11n-2}{2^n}$$

Étudions le signe de $-3x^2+11x-2$ pour $x \in \mathbb{R}$. C'est un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta = 121 - 24 = 97$.
Ses racines sont $x_1 = \dfrac{11+\sqrt{97}}{6} \leqslant \dfrac{11+\sqrt{100}}{6} = \dfrac{21}{6} < 4$ et $x_2 = \dfrac{11-\sqrt{97}}{6} < x_1$.
Pour tout $x > x_1$, $-3x^2+11x-2 < 0$. Or $n \geqslant 4 > x_1$. On en déduit que $\forall n \geqslant 4, u_{n+1} - u_n < 0$ $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante à partir du rang 4.}}$