

DEVOIR MAISON 5

À rendre le mardi 23 novembre 2021

Exercice 1

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + 3$.
 - (a) Écrire une fonction python qui, étant donné un entier naturel n , renvoie la valeur de u_n .
 - (b) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n . Étudier la limite de la suite (u_n) .
 - (c) Écrire un programme python qui affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geq 1000$.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Soit M la matrice telle que $A = I_3 + 3M$.
 - (a) Donner M puis calculer M^2 .
 - (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = I_3 + u_n M$.
 - (c) En déduire A^n en fonction de n .

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
2. Résoudre le système suivant, d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 2 \\ x + 3z = 4 \\ 2x + y + z = -2 \end{cases}$$

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k.$$
 - (a) Écrire une fonction python qui, étant donné $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, renvoie la valeur de $f_n(x)$ en utilisant une boucle.
 - (b) Simplifier l'expression de $f_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
 - (c) Compléter alors le programme suivant pour qu'il renvoie la valeur de $f_n(x)$ sans utiliser de boucle.


```
def fonction2(n, x):
    if ... :
        return ...
    else :
        return ...
```
 - (d) Justifier que f_n est dérivable sur \mathbb{R} puis calculer $f'_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ de deux façons différentes (une avec une somme, une sans somme).
 - (e) Dresser le tableau de variation de f_n sur \mathbb{R}_+ .
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes $S_n = \sum_{k=1}^n k 2^{k-1}$ et $T_n = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i 2^j \right)$.