DEVOIR MAISON 5

Exercice 1

1. (a)
```
def Suite_u(n):
  u = 0
  for k in range(n):
    u = -2*u + 3
  return u
```

(b) (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

$$x = -2x + 3 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

Considérons la suite (v_n) donnée par, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -2u_n + 3 - 1 = -2u_n + 2 = -2(u_n - 1) = -2v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = -1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -(-2)^n$. On en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 - (-2)^n}$$

Étude de la limite - rédaction 1 : Supposons, par l'absurde, que (u_n) admette une limite ℓ. Alors $(-2)^n = 1 - u_n$ admet aussi une limite. Or $((-2)^n)_n$ est une suite géométrique de raison $-2 \leqslant -1$ donc elle n'admet pas de limite. On a une contradiction. Donc $\boxed{(u_n) \text{ n'admet pas de limite.}}$

Étude de la limite - rédaction 2 : $u_{2n} = 1 - (-2)^{2n} = 1 - (-1)^{2n} \times 2^{2n} = 1 - 4^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ car $4 > 1$.

$u_{2n+1} = 1 - (-2)^{2n+1} = 1 - (-1)^{2n+1} \times 2^{2n} \times 2 = 1 + 2 \times 4^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Puisque les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ n'ont pas la même limite, (u_n) n'admet pas de limite.

(c) Première solution
```
n = 0
while 1-(-2)^n < 1000 :
    n = n+1
print(n)
```

Deuxième solution
```
n = 0
while Suite_u(n) < 1000 :
    n = n+1
print(n)
```

Troisième solution
```
n = 0
u = 0
while u < 1000 :
    n = n+1
    u = -2*u + 3
print(n)
```

2. (a) $M = \dfrac{1}{3}(A - I_3) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$M^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donc $\boxed{M^2 = -M}$.

(b) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = I_3 + u_n M$.

Initialisation : pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $I_3 + u_0 M = I_3$ car $u_0 = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = I_3 + u_n M$. Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} = AA^n &= (I_3 + 3M)(I_3 + u_n M) \\ &= I_3 + u_n M + 3M + 3u_n M^2 \\ &= I_3 + (u_n + 3 - 3u_n)M & \text{car } M^2 = -M \\ &= I_3 + (-2u_n + 3)M \\ &= I_3 + u_{n+1} M \end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = I_3 + u_n M.}$

(c) D'après la question 1.b, $A^n = I_3 + (1 - (-2)^n)M$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} -1 - (-2)^{n+1} & 0 & -2 - (-2)^{n+1} \\ 1 - (-2)^n & 1 & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 0 & 2 - (-2)^n \end{pmatrix}}$$

Exercice 2

1. Soient $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ des matrices de ${}_m cM_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 2z = a \\ x + 3z = b \\ 2x + y + z = c \end{cases} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 3z = b \\ 3x + y + 2z = a \\ 2x + y + z = c \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 3z = b \\ y - 7z = a - 3b \\ y - 5z = c - 2b \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 3z = b \\ y - 7z = a - 3b \\ 2z = -a + b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{3}{2}c \\ y = -\frac{5}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{7}{2}c \\ z = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \end{cases}$$

Le système a une unique solution, donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$ et $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.

2. Notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, le système s'écrit $AX = B$. Puisque A est inversible, la seule solution est $X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = \{(4, -10, 0)\}}$

Exercice 3

1. (a)
```python
def f(x,n):
    S = 0
    for k in range(0,n+1):
        S = S + x**k
    return S
```

(b) (x^k) est une suite géométrique de raison x donc :

- $\boxed{\text{si } x = 1,\ f_n(x) = n + 1\,;}$
- $\boxed{\text{si } x \neq 1,\ f_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.}$

(c)
```python
def fonction2(n,x):
    if x == 1 :
        return n+1
    else :
        return (1 - x**(n+1))/(1-x)
```

(d) f_n est une fonction polynomiale, donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- $f_n(x) = 1+x+x^2+\cdots+x^n$ donc $\boxed{f_n'(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.}$
- $f_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ donc
$$\boxed{f_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (-1)(1 - x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2}.}$$

(e) Pour $x \geqslant 0$, $f_n'(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} \geqslant 0$ donc f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
$f_n(0) = 1$ et par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

x	0	$+\infty$
f_n	1 ↗	$+\infty$

2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = f_n'(2)$ (avec la première expression). Donc

$$\boxed{S_n = \frac{-(n+1)2^n + n2^{n+1} + 1}{(1-2)^2} = -(n+1)2^n + n2^{n+1} + 1}$$

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} 2^i \right) = \sum_{i=0}^{n} \left(2^i(i+1) \right) \qquad \text{car } 2^i \text{ est une constante pour } j$$
$$= \sum_{i=0}^{n} i2^i + \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2\sum_{i=0}^{n} i2^{i-1} + \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2}$$
$$= 2(S_n + 0) - 1 + 2^{n+1}$$
$$= -(n+1)2^{n+1} + n2^{n+2} + 2 - 1 + 2^{n+1}$$

$$\boxed{T_n = -n2^{n+1} + n2^{n+2} + 1}$$