Devoir maison 4

À rendre le lundi 8 novembre 2021

Exercice 1

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2+5k-1\right)\,;\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{7}{3^k};\quad \sum_{k=3}^{n+1}(3k+2).$$

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n + 4n \end{cases}$$

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ? Justifier.
2. On note $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ? Justifier.
3. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.
4. Exprimer aussi S_n à l'aide de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis en déduire l'expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

1. Étudier la fonction $g : x \mapsto x^3 - x^2 - x - 2$. On dressera un tableau de variation complet en ajoutant la valeur de g en 2.

   On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1} = (u_n)^2(u_n-1) - 2 \end{cases}$$

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 2$.
3. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. En déduire la limite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4

On considère les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour $n\in\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\quad \text{et}\quad T_n = S_n + \frac{1}{n\times n!}$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et ont la même limite. *On ne cherchera pas à calculer cette limite.*