Devoir maison 3

À rendre le mardi 11 octobre 2022

On soignera la présentation et la rédaction de la copie.
Les conclusions seront encadrées, les calculs seront détaillés.

Exercice 1

Résoudre le système suivant, d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, en utilisant la méthode du pivot de Gauss. On indiquera clairement les pivots choisis (en les entourant) et les opérations élémentaires réalisées.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 2t = 3 \\ 2x + 2y + 6t = 2 \\ -2x + 3y + z + 4t = 3 \\ 8x - y - 3z = -1 \end{cases}$$

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^x$ et la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction g.
2. Déterminer les variations puis le tableau de signe de la fonction g.
   Il pourra être utile de calculer $g(0)$.
3. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction f.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f (hors limites).
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
6. On note $u_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. On considère maintenant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
   $$v_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f(v_n).$$
   (a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n existe et $v_n \geqslant 1$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \geqslant v_n$. Que peut-on en déduire pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 2u_n}{2 + u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n - 1 > 0$.
2. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
   (b) Démontrer que $\ell \geqslant 1$ et que $\ell = \dfrac{1 + 2\ell}{2 + \ell}$.
   (c) Déterminer la valeur de ℓ.