DEVOIR MAISON 3

À rendre le mardi 12 octobre 2021

Exercice 1

Soit $f\colon x \mapsto x^2 - x\ln(x)$ définie sur $]0,+\infty[$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f.
   Indication : le signe de $f'(x)$ n'est pas clair, on s'inspirera de l'exercice 4 du TD AN1.

Exercice 2

Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-u_n} \end{cases}$$

Partie 1 - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} - x.$$

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f. Expliciter en français les variations précises de f (on étudiera la stricte monotonie).
4. Justifier que $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$ pour tout réel x et que $1 - \mathrm{e}^{-x} = x$ si et seulement si $x = 0$.

Partie 2 - Étude de la suite

5. Calculer u_1 et u_2.
6. Écrire une fonction python `Suite_u(n)` qui, étant donné un entier naturel n, renvoie la valeur de u_n.
7. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
8. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
9. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
10. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant \dfrac{u_n}{1+u_n}$.