Devoir maison 3

Exercice 1

1. - $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0}$.
   - Soit $x > 0$.
   $$f(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right).$$
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2. $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$ donc par produit et différence, f est dérivable sur $]0,+\infty[$.
   Soit $x > 0$.
   $$f'(x) = 2x - \left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = 2x - \ln(x) - 1.$$
   Le signe de $f'(x)$ n'est pas clair. Étudions la fonction f'. Par combinaison linéaire, f' est dérivable sur $]0,+\infty[$. Soit $x > 0$.
   $$f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$$
   Puisque $x > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $2x - 1$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

   La fonction f' est décroissante sur $]0, \frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2}, 0[$. Elle admet un minimum en $\frac{1}{2}$ qui vaut $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) > 0$. Donc
   $$\forall x > 0, \quad f'(x) \geqslant f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0.$$
   On en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[}$.

Exercice 2

Partie 1 - Étude d'une fonction

1. $x \mapsto 1$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et $x \mapsto x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par combinaison linéaire $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}.}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.
   Soit $x < 0$,
   $$f(x) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x} - x = 1 - \frac{1 + x\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}.$$
   Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$ donc par quotient puis somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1.$$
   Or par stricte croissance de ln sur $]0,+\infty[$:
   $$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow -x \geqslant \ln(1) \Leftrightarrow x \leqslant 0$$
   et
   $$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$
   Le tableau de variation de f est

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

   Puisque l'équation $f'(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions on peut dire que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty, 0] \text{ et strictement décroissante sur } [0,+\infty[.}$

4. f admet un maximum en 0 qui vaut $f(0) = 0$ donc pour tout réel x, $f(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $\boxed{1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x}$. De plus :

   - si $x < 0$, $f(x) < f(0) = 0$ car f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$;
   - si $x > 0$, $f(x) < f(0) = 0$ car f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

   On en déduit que $f(x) < 0$ si $x \neq 0$ et donc $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$: $\boxed{1 - \mathrm{e}^{-x} = x \Leftrightarrow x = 0}$.

Partie 2 - Étude de la suite

5. $\boxed{u_1 = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \text{ et } u_2 = 1 - \exp\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}} - 1\right)}$.

6.
```
import numpy as np
def Suite_u(n):
  u = 1
  for k in range(n):
    u = 1 - np.exp(-u)
  return u
```

7. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$
   Initialisation : $u_0 = 1 > 0$.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors $-u_n < 0$ donc $\exp(-u_n) < 1$ par stricte croissance de exp. Ainsi,
   $$u_{n+1} = 1 - \exp(-u_n) > 0.$$
   Conclusion : $\boxed{\text{d'après le principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.}$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $$u_{n+1} - u_n = 1 - \exp(-u_n) - u_n = f(u_n) \leqslant 0$$
   d'après la question 4. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

9. (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge.}}$

10. Notons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \in \mathbb{R}$.

    - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc par passage à la limite $\ell \geqslant 0$ (cette étape est en fait inutile ici).
    - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \exp(-u_n)$.
      Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - \exp(-u_n)) = 1 - \mathrm{e}^{-\ell}$ donc
      $$\ell = 1 - \mathrm{e}^{-\ell} \quad \text{donc} \quad 1 - \mathrm{e}^{-\ell} - \ell = 0 \quad \text{donc} \quad f(\ell) = 0.$$
      D'après la question 4, ceci signifie que $\ell = 0$.
      $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. $1 + u_n > 0$ donc
    $$\begin{aligned} u_{n+1} \geqslant \frac{u_n}{1+u_n} &\Leftrightarrow u_{n+1}(1+u_n) \geqslant u_n \\ &\Leftrightarrow (1 - \mathrm{e}^{-u_n})(1+u_n) \geqslant u_n \\ &\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-u_n} + u_n - u_n \mathrm{e}^{-u_n} \geqslant u_n \\ &\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-u_n} - u_n \mathrm{e}^{-u_n} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{u_n} - 1 - u_n \geqslant 0 && \text{car } \mathrm{e}^{u_n} > 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{u_n} + u_n \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow f(-u_n) \leqslant 0. \end{aligned}$$
    ce qui est vrai d'après la question 4. Donc $\boxed{u_{n+1} \geqslant \dfrac{u_n}{1+u_n}}$.