Devoir maison 2

À rendre le mardi 27 septembre 2022

On soignera la présentation et la rédaction de la copie.
Les conclusions seront encadrées, les calculs seront détaillés.

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(2-x) - \ln(x+2)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Étudier les variations de f. *On attend une conclusion précise en français.*

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $I =]-1, +\infty[$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in I$.
3. En déduire le tableau de variation de f (hors limites).
4. On considère la foncton $g : x \mapsto \sqrt{2x}$. Étudier la position relative de la courbe de f et de celle de g sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3

Soit λ un réel non nul. On considère la fonction $f : x \mapsto \lambda x(1-x)$.

Dans tout l'exercice, les réponses pourront dépendre de la valeur de λ. Dans ce cas, il conviendra de faire plusieurs cas.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Dresser le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ a une ou deux solutions réelles que l'on précisera.

Exercice 4

On considère la fonction $\varphi : \begin{array}{rcl}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \end{array}$

1. Justifier que φ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

   Pour la suite, on admettra qu'elle est en fait trois fois dérivable sur $]0;+\infty[$.
2. Calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $\varphi'(x)$.
   On notera φ'' la dérivée de φ' et φ''' la dérivée de φ''. Montrer :
   $$\forall x > 0, \quad \varphi''(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}.$$
3. Justifier que φ'' est croissante sur $]0, +\infty[$ et calculer $\varphi''(1)$. En déduire le tableau de signe de φ''.
4. Montrer que $\varphi'(x) \geqslant \mathrm{e}$ pour tout $x > 0$. En déduire les variations de f.
   On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.
5. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
6. Étudier la position relative de T et $\mathcal{C}$. On précisera l'ensemble des points d'intersection.