

DEVOIR MAISON 2

*À rendre le mardi 28 septembre 2021
À faire sans machine.*

Exercice 1

Démontrer que pour tous réels positifs x et y ,

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Démontrer que l'égalité « $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ » n'est pas vraie en général.

Exercice 2

On considère la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier la limite de f en 0^+ .
3. Étudier la limite de f en $+\infty$.
4. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Pour tout $x > 0$, calculer $f'(x)$ puis déterminer le signe de $f'(x)$ (on fera un tableau).
5. Dresser alors le tableau de variation de f .
Donner, en français, les variations de f .

Exercice 3

On a représenté en annexe la courbe \mathcal{C}_g d'une fonction g définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ ainsi que la tangente T à cette courbe en son point de coordonnées $(0; 4)$. On admet que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_g au voisinage de $+\infty$.

Partie 1

1. Préciser la valeur du réel $g(0)$ et la valeur de la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. On admet que la tangente T passe par le point de coordonnées $(3; 1)$. Déterminer $g'(0)$. Quelle est l'équation de T ?
3. On admet que la fonction g est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{a}{e^{bx} + 1}$$

où a et b sont des nombres réels. En utilisant les résultats précédents, déterminer les valeurs des réels a et b .

Partie 2

On considère un objet manufacturé dont le prix unitaire est x , en centaines d'euros.

D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ pour cet objet, en centaines d'unités, sont définies pour tout x positif ou nul par :

$$f(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{8}{\exp\left(\frac{x}{2}\right) + 1}.$$

On admettra que $\ln(3) \approx 1,10$. On rappelle que cet exercice est à faire sans calculatrice.

1. Si le prix de vente unitaire de l'objet est 200 €, combien d'objets les consommateurs sont-ils prêts à acheter ? On donnera la valeur exacte puis les instructions python à saisir pour obtenir une valeur approchée de ce nombre.
On ne demande pas de calculer cette valeur approchée.
2. Calculer le prix de vente unitaire de l'objet pour que la demande soit de 200 objets. On déterminera la valeur exacte de ce prix, puis on en donnera une valeur approchée et l'instruction python à saisir pour réaliser le calcul.
3. Déterminer, en fonction de la quantité Q offerte (en centaines d'unités), l'expression du prix unitaire x (en centaines d'euros).
4. (a) On appelle « prix d'équilibre » le prix permettant l'égalité entre l'offre et la demande. Quel est le prix d'équilibre en euros, noté p_E ? On donnera une valeur exacte.
(b) Au prix d'équilibre, quelle est la valeur commune de l'offre et de la demande ?
Quel est le chiffre d'affaire généré par les ventes au prix d'équilibre ? On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée.
5. Étudier la position relative de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g . Interpréter en fonction des notions d'offre et de demande.
6. Étudier la fonction f (on attend un tableau de variation complet) puis tracer sa représentation graphique en annexe.
 $e^2 \approx 7,4$.

Exercice 3 – Annexe
À rendre avec la copie

Nom :

