DEVOIR MAISON 2

Corrigé

Exercice 1

Rédaction 1 : Soient x, y des réels positifs. Transformons l'inégalité à montrer.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y} &\iff (\sqrt{x+y})^2 \leqslant (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &\iff x+y \leqslant x+2\sqrt{xy}+y \\ &\iff 0 \leqslant 2\sqrt{xy}.\end{aligned}$$

Or $0 \leqslant 2\sqrt{xy}$ est vraie donc par équivalence, $\boxed{\text{l'inégalité } \sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y} \text{ est vraie.}}$

Rédaction 2 : Soient x, y des réels strictement positifs. On va utiliser la quantité conjuguée de $a-b$ (en l'occurence $a+b$) pour faire apparaître une identité remarquable.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+y}-(\sqrt{x}+\sqrt{y}) &= \frac{\left(\sqrt{x+y}-(\sqrt{x}+\sqrt{y})\right)\left(\sqrt{x+y}+(\sqrt{x}+\sqrt{y})\right)}{\sqrt{x+y}+(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\ &= \frac{(\sqrt{x+y})^2-(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{x+y}+(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\ &= \frac{x+y-(x+2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x+y}+(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\ &= \frac{-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x+y}+(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\ &\leqslant 0\end{aligned}$$

car $-2\sqrt{xy} \leqslant 0$ et $\sqrt{x+y}+(\sqrt{x}+\sqrt{y}) > 0$.
Remarque : ce calcul ne fonctionne pas si $x = y = 0$ (on aurait une division par zéro), d'où l'hypothèse de stricte positivité. Si $x = 0$ ou $y = 0$, l'inégalité est évidente, donc cela complète le raisonnement.
On en déduit que $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}$ pour tous réels positifs x et y.

Montrons maintenant que l'égalité n'est pas vraie en général. Pour cela, on exhibe un contre-exemple.
Prenons par exemple, $x = 9$ et $y = 16$. On a $\sqrt{x+y} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 3+4 = 7 \neq 5$. Donc $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x}+\sqrt{y}$

Exercice 2

On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2+1) - \ln(x)$.

1. $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto x^2+1$ est polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}$. Par composée, $x \mapsto \ln(x^2+1)$ est défnie sur
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2+1 > 0\} = \mathbb{R}$$
car $x^2+1 \geqslant 1 > 0$ pour tout réel x.
Par différence avec la fonction $x \mapsto \ln(x)$, $\boxed{f \text{ est définie sur }]0, +\infty[.}$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1}\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x^2+1) = 0$.
De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty$ donc par différence
$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.}$$

3. Soit $x > 0$.
$$f(x) = \ln(x^2+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \ln\left(\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x+\frac{1}{x}\right).$$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$ donc
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$
Remarque : la première forme de $f(x)$ ne permet pas de conclure car il y a une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ».

4. $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto x^2+1$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a vu que $x^2+1 > 0$ pour tout réel x. Ainsi, par composée puis différence, $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[.}$
Soit $x > 0$.
$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-(x^2+1)}{x(x^2+1)}$$

donc

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}}.$$

Pour $x > 0$, on a $x(x^2+1) > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 1$. Remarquons que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. On a donc :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ce qui donne le tableau de signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

5. D'après ce qui précède, le tableau de variation de f est :

x	0		1		$+\infty$
f	‖ $+\infty$	↘	$\ln(2)$	↗	$+\infty$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est décroissante sur }]0,1[\text{ et croissante sur } [1,+\infty[.}$

Exercice 3

Partie 1

1. $\boxed{g(0) = 4}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0}$.

2. $g'(0)$ est le coefficient directeur de la droite T qui passe par les points $(0;4)$ et $(3;1)$. Donc

$$\boxed{g'(0) = \frac{4-1}{0-3} = -1.}$$

L'équation de T est $y = g'(0)(x-0) + g(0)$ c'est-à-dire $\boxed{y = -x+4}$.

3. $g(0) = 4 \iff \dfrac{a}{1+1} = 4 \iff a = 8$.

On a donc $g(x) = \dfrac{8}{\mathrm{e}^{bx}+1}$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$. Puisque $\mathrm{e}^{bx}+1 > 0$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \mathrm{e}^{bx}+1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ et y est dérivable. Par quotient, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$g'(x) = -\frac{8b\,\mathrm{e}^{bx}}{(\mathrm{e}^{bx}+1)^2}.$$

$$g'(0) = -1 \iff -\frac{8b}{4} = -1 \iff b = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\boxed{g(x) = \dfrac{8}{\mathrm{e}^{x/2}+1} \text{ pour tout réel } x \in \mathbb{R}_+.}$

Partie 2

1. On a ici $x = 2$ (centaines d'euros). La demande est : $g(2) = \dfrac{8}{\mathrm{e}+1}$ (centaines d'unités). Donc les consommateurs sont prêts à acheter $\boxed{\dfrac{800}{\mathrm{e}+1} \text{ objets.}}$

```
import numpy as np
800/(np.e + 1)
```

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$g(x) = 2 \iff \frac{8}{\exp\left(\frac{x}{2}\right)+1} = 2 \iff \exp\left(\frac{x}{2}\right) = 3 \iff x = 2\ln(3).$$

$\boxed{\text{Le prix unitaire pour une demande de 200 objets est } 200\ln(3) \text{ euros}}$.
Puisque $\ln(3) \approx 1,10$, cela donne $\boxed{\text{environ 220 euros}}$.

```
import numpy as np
200*np.log(3)
```

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$f(x) = Q \iff \exp\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = Q \iff \exp\left(\frac{x}{2}\right) = Q+1 \iff \boxed{x = 2\ln(Q+1)}$$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff \exp\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{8}{\exp\left(\frac{x}{2}\right)+1} \\ &\iff \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right)\left(\exp\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) = 8 \\ &\iff \mathrm{e}^x - 1 = 8 \\ &\iff x = \ln(9) \\ &\iff x = 2\ln(3) \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{p_E = 200\ln(3) \text{ en euros.}}$

(b) Puisque l'on retrouve la réponse à la question 2, on a $g(2\ln(3)) = 2$: la valeur commune correspond à $\boxed{\text{200 objets.}}$

Le chiffre d'affaire est : $\boxed{p_E \times 200 = 40000\ln(3) \text{ euros.}}$

Or $\ln(3) \approx 1,10$ donc $\boxed{\text{le chiffre d'affaire est d'environ 44 000 euros.}}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \exp\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - \frac{8}{\exp\left(\frac{x}{2}\right)+1} \\ &= \frac{\left(\exp\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right)\left(\exp\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) - 8}{\exp\left(\frac{x}{2}\right)+1} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x - 9}{\exp\left(\frac{x}{2}\right)+1} \end{aligned}$$

Or, $\exp\left(\frac{x}{2}\right) + 1 > 0$ donc le signe de $f(x) - g(x)$ est celui de $\mathrm{e}^x - 9$.

$$\mathrm{e}^x - 9 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 9 \iff x \geqslant \ln(9) \iff x \geqslant 2\ln(3)$$

par stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0		$2\ln(3)$		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	

$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de } \mathcal{C}_g \text{ sur } [0, 2\ln(3)] \text{ et au dessus sur } [2\ln(3), +\infty[.}$ Les deux courbes se coupent à l'abscisse $\ln(9) = 2\ln(3)$ comme déjà montré à la question 4.
Pour un prix inférieur à p_E, l'offre est inférieure à la demande et pour un prix supérieur à p_E l'offre est supérieure à la demande.

6. Par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\exp\left(\dfrac{x}{2}\right) > 0$. donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$. De plus, par somme

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

x	0	$+\infty$
f	0 ↗	$+\infty$