DEVOIR MAISON 1

À rendre le vendredi 2 septembre 2022

On soignera la présentation et la rédaction de la copie.
Les conclusions seront encadrées, les calculs seront détaillés.

Exercice 1

1. Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{2x-1} \leqslant \dfrac{4}{x^2-4}$.

2. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1} = \dfrac{\sqrt{x+1}+1}{x}$.

Exercice 2

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2-1}$.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Donner, en français, les variations de f.
4. Déterminer les points d'intersection entre la courbe de f, $\mathcal{C}_f$, et l'axe des abscisses.

Exercice 3

Une association d'un village de 1000 habitants (nombre constant) étudie le nombre de ses bénévoles. L'année de création de l'association, il y avait 80 bénévoles. Puis chaque année, on estime que 40 % d'entre eux quitteront l'association et 10 % des habitants qui n'étaient pas bénévoles l'année précédente le deviendront. On note u_n le nombre d'habitants bénévoles et v_n le nombre d'habitants non-bénévoles, n années après la création de l'association.

1. Donner la valeur de u_0, de v_0 et de $u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Justifier que pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{1}{10}v_n.$$

3. Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 100.$$

4. (a) Dans un repère orthonormé (échelle : 1 grand carreau ou 1 cm = 20), tracer la droite D d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 100$.
   Représenter graphiquement u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite D. Laisser apparent tout trait de construction.

   (b) Conjecturer la monotonie et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_n - 200$.

   (a) Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

   (b) En déduire l'expression de w_n puis de u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

6. Démontrer les deux conjectures de la question 4.b.

Exercice 4

Soit x un réel de l'intervalle $[0, 80]$.
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.
Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

On tire au hasard un cube de l'urne. On note

- B l'événement « le cube tiré est bleu »,
- R l'événement « le cube tiré est rouge »,
- C l'événement « le cube tiré est marqué d'un cercle »,
- L l'événement « le cube tiré est marqué d'un losange »,
- E l'événement « le cube tiré est marqué d'une étoile ».

1. Faire un arbre probabiliste représentant les issues de l'expérience, avec les probabilités déduites immédiatement de l'énoncé.
2. Démontrer que $P(L) = \dfrac{3}{25} + \dfrac{x}{250}$.
3. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$.
   Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.