DEVOIR MAISON 1 – CORRIGÉ

Exercice 1

1. Soit x un réel. Il y a deux quotients, commençons par chercher les valeurs interdites :

$$2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \quad ; \quad x^2-4 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ou } x=2.$$

Les <u>valeurs interdites</u> sont : -2, $\frac{1}{2}$ et 2.

Soit donc x un réel de $\mathbb{R}\setminus\{-2,\ \frac{1}{2},\ 2\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x-1} \leqslant \frac{4}{x^2-4} &\iff \frac{1}{2x-1}-\frac{4}{x^2-4} \leqslant 0 \\
&\iff \frac{x^2-4}{(2x-1)(x^2-4)}-\frac{4(2x-1)}{(2x-1)(x^2-4)} \leqslant 0 \\
&\iff \frac{x^2-8x}{(2x-1)(x^2-4)} \leqslant 0 \\
&\iff \frac{x(x-8)}{(2x-1)(x^2-4)} \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Faisons un tableau de signe du quotient pour résoudre cette inéquation.

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{1}{2}$		2		8		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-8$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x(x-8)}{(2x-1)(x^2-4)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est donc }]-\infty,-2[\cup[0,\tfrac{1}{2}[\cup]2,8].}$

2. Soit $x>0$.

Rédaction 1 : on montre que la différence est nulle.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{\sqrt{x+1}+1}{x} &= \frac{x}{x(\sqrt{x+1}-1)}-\frac{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}{x(\sqrt{x+1}-1)} \\
&= \frac{x}{x(\sqrt{x+1}-1)}-\frac{(\sqrt{x+1})^2-1^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} \\
&= \frac{x}{x(\sqrt{x+1}-1)}-\frac{x}{x(\sqrt{x+1}-1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{\sqrt{x+1}+1}{x}.}$

Rédaction 2 : utilisation de la quantité conjuguée.
L'idée ici est de se « débarrasser » de la racine carrée en faisant apparaître l'identité remarquable $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. On dit que $a+b$ est la quantité conjuguée de $a-b$ (et vice versa).
Ici, au dénominteur, $a=\sqrt{x+1}$ et $b=1$.

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{\sqrt{x+1}+1}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{\sqrt{x+1}+1}{(\sqrt{x+1})^2-1^2}=\frac{\sqrt{x+1}+1}{x}$$

Exercice 2

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ par $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2-1}$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

$$f'(x)=\frac{4x(x^2-1)-2x(2x^2-1)}{(x^2-1)^2}=\frac{4x^3-4x-4x^3+2x)}{(x^2-1)^2}$$

donc $\boxed{f'(x)=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}.}$

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On a : $(x^2 - 1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-2x$. Cela donne le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
f		↗	‖	↗	1	↘	‖	↘	

3. f est croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, 0]$. f est décroissante sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

4. Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } -\frac{1}{\sqrt{2}}.}$

Exercice 3

1. Au début il y a 80 bénévoles donc $\boxed{u_0 = 80 \text{ et } v_0 = 1000 - 80 = 920.}$
De plus, pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n + v_n = 1000.}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Entre l'année n et l'année $n+1$, l'association a :
   - perdu 40 % de ses bénévoles, c'est-à-dire $-\frac{40}{100}u_n$;
   - gagné 10 % de nouveaux bénévoles, c'est-à-dire $+\frac{10}{100}v_n$.

   Ainsi,

$$u_{n+1} = u_n - \frac{40}{100}u_n + \frac{10}{100}v_n = \frac{60}{100}u_n + \frac{1}{10}v_n = \frac{3}{5}u_n + \frac{1}{10}v_n.$$

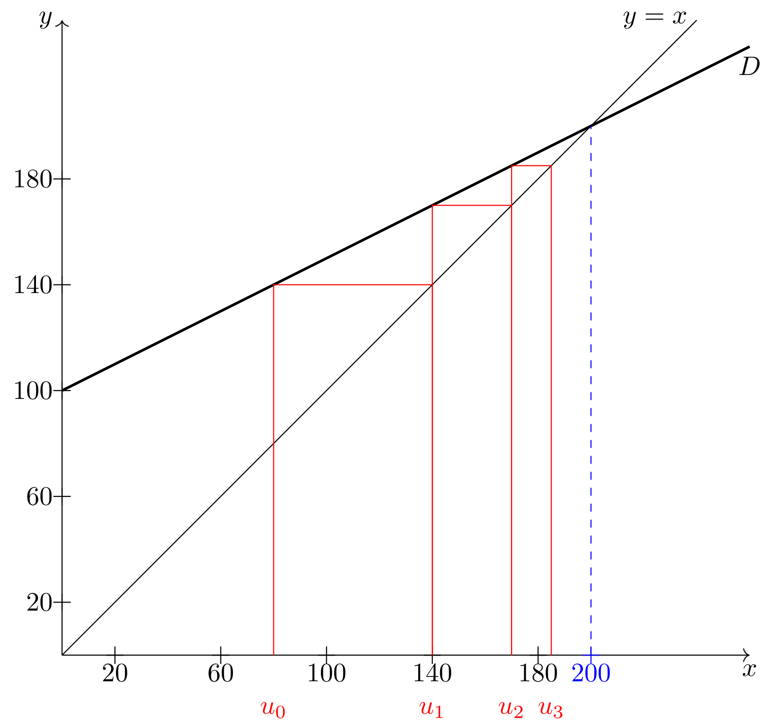
   On a bien $\boxed{u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{1}{10}v_n.}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $v_n = 1000 - u_n$ (question 1), donc

$$u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{1}{10}(1000 - u_n) = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right)u_n + 100 = \frac{5}{10}u_n + 100 = \frac{1}{2}u_n + 100.$$

   Ainsi, $\boxed{u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 100.}$

4. (a)



   (b) $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ semble croissante et converger vers } 200.}$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_n - 200$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 200 = \frac{1}{2}u_n + 100 - 200 = \frac{1}{2}(w_n + 200) - 100 = \frac{1}{2}w_n.$$

   $\boxed{\text{La suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc géométrique de raison } \frac{1}{2}.}$

(b) Puisque $w_0 = u_n - 200 = 80 - 200 = -120$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{w_n = -120 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Or, $u_n = w_n + 200$ donc $\boxed{u_n = 200 - 120 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

Enfin, $v_n = 1000 - u_n$ donc $\boxed{v_n = 800 + 120 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

6. • Monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(200 - 120 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - \left(200 - 120 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ &= 120 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2} + 1\right) \\ &= 60 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Autre calcul possible :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 100 - u_n = 100 - \frac{1}{2}u_n = 100 - \frac{1}{2}\left(200 - 120 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 60 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On en déduit que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien croissante.}}$

• Limite. Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 200}$.

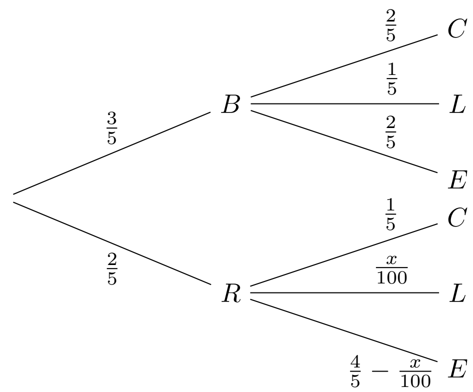
Exercice 4

1. L'énoncé donne $P(B) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ puis $P(R) = 1 - P(B) = \frac{2}{5}$.

On a aussi $P_B(C) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$, $P_B(L) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

puis $P_B(E) = 1 - P_B(C) - P_B(L) = \frac{2}{5}$. Enfin, $P_R(C) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$, $P_R(L) = \frac{x}{100}$

donc $P_R(E) = 1 - P_R(C) - P_R(L) = \frac{4}{5} - \frac{x}{100}$.



2. D'après la formule des probabilités totales, B et R formant une partition de l'univers,

$$P(L) = P(B) \times P_B(L) + P(R) \times P_R(L) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{x}{100} = \frac{3}{25} + \frac{x}{250}.$$

Ainsi, on a bien : $\boxed{P(L) = \frac{3}{25} + \frac{x}{250}}$

3. On cherche à savoir pour quels x on a : $P(E) = P(L)$. Or

$$P(E) = P(B) \times P_B(E) + P(R) \times P_R(E) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \left(\frac{4}{5} - \frac{x}{100}\right) = \frac{14}{25} - \frac{x}{250}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(E) = P(L) &\iff \frac{14}{25} - \frac{x}{250} = \frac{3}{25} + \frac{x}{250} \\ &\iff 140 - x = 30 + x \qquad \text{(on a fait } \times 250) \\ &\iff x = 55. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La probabilité de tirer un cube marqué d'un losange est égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile si et seulement si } x = 55.}$

4. On cherche $P_L(B)$.

$$P_L(B) = \frac{P(B \cap L)}{P(L)} = \frac{P(B) \times P_B(L)}{P(L)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{1}{5}}{\frac{3}{25} + \frac{50}{250}} = \frac{3}{8}.$$

$\boxed{\text{La probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange est égale à } \frac{3}{8}.}$