

Comment organiser vos révisions ?

Avant la rentrée, je vous demande de travailler les points suivants du programme du lycée (et collège) :

- Calcul (parenthésage, fractions, développement, factorisation). Équations et inéquations (produits, quotient, second degré).
Les pages suivantes de ce document proposent des exercices de révision en autonomie sur ce point.
- Suites : définition explicite (terme général) ou par une relation de récurrence, suites arithmétiques et géométriques, monotonie, limite (notamment de q^n).
- Étude de fonctions :
 - Fonctions usuelles : carré, cube, puissance n , inverse, racine carrée, exp et ln.
 - Dérivation et étude des variations.
- Probabilités : calcul de probabilités, probabilités conditionnelles, arbres pondérés, variables aléatoires, loi binomiale.

Ce programme se base sur des notions vues en seconde, en première spécialité mathématiques et, pour la terminale, sur des notions communes à la spécialité mathématiques et à l'option mathématiques complémentaires.

Cette liste est volontairement restreinte et contient les points essentiels au bon démarrage de l'année.

Reprenez donc vos cours et refaites quelques exercices (en plus de ce devoir). Pour ceux qui n'auraient plus leurs anciens cours :

- <https://mathenpoche.sesamath.net/> : exercices en ligne.
- <https://manuel.sesamath.net/> : manuels à télécharger.

Je vous conseille de commencer par les exercices de ce document avant de vous lancer dans le DM1.

Le premier devoir surveillé (vendredi 9 septembre 2022) portera sur ce même programme.

NB : la calculatrice n'est pas autorisée aux concours. Il va falloir réapprendre à faire les calculs à la main. Je vous conseille de vous y mettre tout de suite. La calculatrice sera néanmoins autorisée (sans être nécessaire) pour le premier devoir surveillé de l'année.

Entraînement au calcul

Ce document regroupe des exercices de révision en autonomie et n'est pas à rendre. Vous trouverez sur le site le corrigé de ces exercices ainsi que le sujet du DM1, qui est lui à rédiger sur copie.

Les méthodes de calcul vues au collège et au lycée doivent être parfaitement maîtrisées en CPGE (sans calculatrice!). Les premières interrogations vérifieront cela (devoirs, colles, interrogations de cours).

Exercice 1

Calcul général et identités remarquables. On s'entraîne sans calculatrice!

1. Développer

- (a) Développer et réduire $(x + 2)(-2x - 3)$.
- (b) Développer et réduire $(3x - 1)^2$.
- (c) Développer et réduire $(t + 2)(t - 2)$.
- (d) Développer et réduire $(a + b)^3$.

2. Factoriser

Attention, une factorisation est complète si l'opération principale de l'expression finale est un produit $A \times B$.

Une expression du type $A \times B + C$, où l'on a factorisé seulement le début de l'expression, ne convient pas ici (l'opération principale est ici une somme, la somme de $A \times B$ et de C).

- (a) Factoriser $3x - 5x^2$.
- (b) Factoriser $x - 1 + 2x(x - 1)$.
- (c) Factoriser $4x^2 - 9$.
- (d) Factoriser $(6 - 2t)^2 - (t - 1)(3 - t)$.
- (e) Calculer, à la main, $79 \times 822 - 79 \times 812$.

3. Fractions

- (a) Calculer $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$.
- (b) Calculer $\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$.
- (c) Calculer $\frac{3}{4} \times \frac{4}{9} \times 2$.
- (d) Calculer $\frac{2}{5}$ et $\frac{2}{3}$. *On notera que la bonne présentation des fractions est cruciale.*
- (e) Calculer $\frac{3}{2} - \frac{2}{25} \times 10$.
- (f) Réduire en un seul quotient $\frac{x - 3}{2} - \frac{1 - 2x}{4}$.
- (g) Réduire en un seul quotient $\frac{x - 3}{1 + x} - \frac{1 - 2x}{(1 + x)^2}$.
- (h) Réduire en un seul quotient $\frac{x - 3}{1 + x} - \frac{1 - 2x}{5 - x}$.

4. Puissances

Rappels :

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n, \quad a^n \times a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{n \times m},$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}.$$

$$a^0 = 1.$$

- (a) Calculer 2^{4^2} et $(2^4)^2$.
- (b) Écrire $(2x)^3 \times (4x^3)^2$ sous la forme $2^a \times x^b$.
- (c) Développer $(x^2 - 3x)^2$.
- (d) Simplifier $\frac{2^{x+3}}{8 \times 2^{2x}}$.
- (e) Réduire en un seul quotient $\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \frac{3y}{x^2}$.
- (f) Simplifier $\frac{(x^2y)^3}{x^{-1}y^4}$.

5. Racine carréeRappels : pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$

$$\sqrt{a^2} = a, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

- (a) Calculer $\sqrt{\sqrt{16}}$
- (b) Justifier que $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, de deux façons différentes.
- (c) De même, écrire sous une autre forme $\sqrt{45}$ et $\sqrt{20}$.

Exercice 2*Équations et inéquations du premier degré*

- Résoudre $2x + 5 = 3x - 4$
- Résoudre $x = 2 - x$.
- Résoudre $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 5$.
- Résoudre $4 - x \leq 2 + x$
- Résoudre $6x + 1 > 1 - 7x$.
- Résoudre $3 - 2x < 7 - 4x$.

Exercice 3*Équations et inéquations du second degré*

- Résoudre $2x^2 - 3x - 2 = 0$.
- Résoudre $x^2 - 5x + 2 = 0$.
- Résoudre $x^2 + 6x + 9 = 0$.
- Résoudre $2x + 1 = 3x^2$.
- Résoudre $3x - x^2 - 2 > 0$.
- Résoudre $x^2 + x \geq 12$.
- Résoudre $x^2 - 4x + 4 > 0$.
- Résoudre $x^2 + x + 1 \geq 0$.

Exercice 4

Tableaux de signe (pour les inéquations, le signe des dérivées, etc.)

Dresser le tableau de signe des expressions suivantes.

1. $5x - 6$
2. $3 - x$
3. $1 - x^2$
4. $(2x - 5)(x + 3)(1 - 5x)$
5. $x^3 - 5x^2 + 4x$
6. $\frac{3 - 2x}{6x - 3}$
7. $\frac{e^x - x e^x}{1 - 4x^2}$

Exercice 5

Quotients

Rappel de la méthode :

- Chercher les valeurs interdites.
- Passer tout à gauche et réduire (pour les équations, le produit en croix est possible. Interdit pour les inéquations).
- Équations : $\frac{A}{B} = 0$ si et seulement si $A = 0$.
- Inéquations : faire un tableau de signe et conclure.

1. Résoudre $\frac{2x - 1}{x + 3} = \frac{1}{x + 2}$.
2. Résoudre $2x + 1 = \frac{1}{2x - 3}$.
3. Résoudre $\frac{4 - x}{x - 1} \leq \frac{2}{x + 1}$.

Exercice 6

Exponentielle et logarithme

Rappels : $\exp(x) = e^x$ et les règles de calcul avec les puissances sont toujours valables.

Le nombre $e = \exp(1)$ (nombre d'Euler) vaut environ 2,7.

Pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \quad \ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1, \quad \exp(\ln(a)) = a, \quad \ln(\exp(x)) = x$$

1. Simplifier $\exp(3) \times \exp(-7)$.
2. Simplifier $\frac{\exp(2x)}{\exp(4x)}$.
3. Factoriser $\exp(x) - \exp(x + 1)$.
4. Résoudre l'équation $\ln(2) + \ln(x) = 1$.

Exercice 7

Calcul de dérivées

Connaître les formules de dérivation des sommes, produits et quotients.

Dériver les fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x^2 + 3x - 5$

2. $f : x \mapsto 2x^3 - 7x^4$

3. $f : x \mapsto x e^x$

4. $f : x \mapsto \frac{x + 2}{x^2 - x + 1}$

5. $f : x \mapsto 2x - 5 \ln(x)$

6. $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

7. $f : x \mapsto \sqrt{x} \ln(x)$.