Révisions CB1

PRÉPARATION AU CONCOURS BLANC

1 Algèbre

Niveau 1

Exercice 1 Montrer que $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Niveau 2

Exercice 2 Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et donner P^{-1}.
2. Montrer que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire les coefficients de A^n.

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A + I_3)(A - 2I_3) = 0_3$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que
$$A^n = a_n A + b_n I_3$$
On précisera les relations de récurrences définissant les suites (a_n) et (b_n).
3. Montrer que (a_n) vérifie une relation de récurrence d'ordre 2. En déduire son terme général.
4. Déterminer A^n.

2 Analyse

Niveau 1

Exercice 4 Étudier les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sqrt{2x+3}; \qquad g : x \mapsto x^2 \ln(x); \qquad h : x \mapsto x \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 5

1. Étudier la convergence des suites de terme général :
$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; $v_n = \dfrac{n(-1)^n}{n^2+1}$; $w_n = \dfrac{3^n + 2^n}{5^n - 1}$.
2. Déterminer le terme général de (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
3. Déterminer le terme général de (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.

Exercice 6 Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{10}{k} 3^{10-k}$.

Niveau 2

Exercice 7 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

1. Étudier la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = \dfrac{1+x^n}{(1+x)^n}$.
2. Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n)$.

Exercice 9 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0, 3]$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 10 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1. Étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.
3. En déduire que la limite de la suite (v_n).

Exercice 11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = 2 - (u_n)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant -3$.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et préciser sa limite.

3 Probabilités

Niveau 1

Exercice 12 Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour d'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante :

- si la place est réservée le jour k, elle le sera encore le jour $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{9}{10}$
- si la place est libre le jour k, elle sera réservée le jour $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{4}{10}$

Pour k entier positif, on note r_k la probabilité que la place soit réservée le jour k. On suppose que $r_0 = 0$.

1. Déterminer r_1 et r_2.
2. Montrer que, pour tout $k \geqslant 0$, $r_{k+1} = \dfrac{1}{2} r_k + \dfrac{2}{5}$.
3. En déduire r_k en fonction de k.
4. Calculer la limite de la suite (r_k). Interpréter.

Niveau 2

Exercice 13 Un concours de tir à l'arc s'effectue sur deux cibles. Le tireur effectue seulement trois tirs, en changeant de cible à chaque fois. Il gagne le jeu s'il parvient à toucher deux cibles consécutivement. La probabilité de toucher la cible 1 (resp. la cible 2) est p (resp. q), avec $q < p$. On suppose les tirs indépendants.

1. Stratégie 1 : le joueur tire en premier sur la cible 1. Déterminer la probabilité pour qu'il gagne.
2. Stratégie 2 : le joueur tire en premier sur la cible 2. Déterminer la probabilité pour qu'il gagne.
3. Quelle stratégie est la meilleure ?

Niveau 3

Exercice 14 On a $n \geqslant 2$ urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Dans chaque cas, l'urne U_k contient k boules noires et $n-k$ boules blanches.

On choisit une urne puis on tire une boule dans celle-ci. La probabilité de choisir l'urne U_k est égale à ka, pour $a \in \mathbb{R}_+$ fixé.

1. Que vaut a ?
2. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule noire.
3. On tire une boule : elle est noire. Quelle est la probabilité qu'elle soit tirée de l'urne U_3 ?

4 Concours blanc 2022

Exercice 15 Soit g la fonction définie pour tout réel x par

$$g(x) = (x^3 + 4x^2 + 5x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans un repère du plan.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout réel x, $x^3 + x^2 - 3x - 3 = (x+1)(x^2-3)$.
3. En déduire les variations de g. On dressera le tableau de variation complet de g.
4. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -2.

Exercice 16 **Partie I : préliminaires**

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x^2) - x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0,1]$ et les solutions de $f(x) = 0$ sur $[0,1]$, en justifiant précisément.
5. Justifier pour tout réel $x \geqslant 0$, l'inégalité : $\ln(1+x) \leqslant x$.

Partie II : étude d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln\left(1 + (u_n)^2\right)$.

6. Écrire un programme python qui affiche la liste $L = [u_0, u_1, \ldots, u_{100}]$.
7. Établir pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement suivant : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
8. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
9. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
10. Écrire un programme python qui détermine le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 10^{-4}$.
11. (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leqslant u_n^2$.
    (b) En déduire pour tout entier $n \geqslant 1$, l'inégalité $u_n \leqslant (\ln(2))^n$.
    (c) Établir pour tout entier $n \geqslant 2$, l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \frac{1-(\ln(2))^n}{1-\ln(2)}$.

Exercice 17 **Partie I : calcul matriciel**

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et préciser la matrice P^{-1}, puis exprimer P^{-1} en fonction de Q.
2. Montrer que $D = \dfrac{1}{6}QMP$ est une matrice diagonale que l'on calculera.
3. Exprimer M en fonction de D, Q et P puis montrer que M est inversible et exprimer M^{-1} à l'aide de Q et P.
4. Déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Établir que pour tout entier naturel n, on a :

$$M^n = \frac{1}{6}PD^nQ$$

6. Justifier que la première colonne de la matrice M^n est :

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}.$$

Partie II : étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon

Les trois sports du triathlon sont : la natation, le cyclisme et la course à pied.
Un athlète décide de pratiquer un sport par jour pour s'entraîner au triathlon. Il commence son entraînement par la natation, au jour 0.
Son entraînement obéit ensuite aux règles suivantes (valables pour tout entier naturel n) :

- si l'athlète a pratiqué la natation le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - la natation avec probabilité $1/5$
  - le cyclisme avec probabilité $1/5$
  - la course à pied avec probabilité $3/5$
- si l'athlète a pratiqué le cyclisme le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - la natation avec probabilité $2/5$
  - le cyclisme avec probabilité $3/5$
- si l'athlète a pratiqué la course à pied le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - le cyclisme avec probabilité $1/5$
  - la course à pied avec probabilité $4/5$

Pour tout entier naturel n, on désigne par :

- A_n l'évènement « l'athlète s'entraîne à la natation le jour n » et par a_n la probabilité de A_n.
- B_n l'évènement « l'athlète s'entraîne au cyclisme le jour n » et par b_n la probabilité de B_n.
- C_n l'évènement « l'athlète s'entraîne à la course à pied le jour n » et par c_n la probabilité de C_n.

7. Déterminer a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1.

8. Calculer la probabilité pour qu'il enchaîne natation - course à pied - cyclisme - natation (dans cet ordre) les 4 premiers jours.

9. On suppose, pour cette question seulement, que l'athlète a fait du cyclisme le jour numéro 2. Quelle est la probabilité qu'il ait fait de la natation le jour numéro 1 ?

10. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que pour tout entier naturel n on a :
$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n.$$
Déterminer de même les probabilités b_{n+1} et c_{n+1} en fonction des probabilités a_n, b_n et c_n.
On attend une justification précise.

11. **Parenthèse informatique**. Écrire une fonction python `Probas(n)` qui, étant donné $n \in \mathbb{N}$, renvoie la liste $[a_n, b_n, c_n]$.

12. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$
et exprimer A en fonction de la matrice M de la partie I.

13. En déduire alors l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

14. Déterminer les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.