Révisions CB1

Préparation au concours blanc

1 Algèbre

Niveau 1

Exercice 1 Montrer que $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 2 Les deux questions sont indépendantes.

1. Effectuer la division euclidienne de $X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$ par $X^2 - 1$.
2. Factoriser $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$ en produit de polynômes, pour tout réel x. En déduire le tableau de signe de $f(x)$.

Niveau 2

Exercice 3 Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et donner P^{-1}.
2. Montrer que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire les coefficients de A^n.

Exercice 4 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A + I_3)(A - 2I_3) = 0_3$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que
$$A^n = a_n A + b_n I_3$$
On précisera les relations de récurrences définissant les suites (a_n) et (b_n).
3. Montrer que (a_n) vérifie une relation de récurrence d'ordre 2. En déduire son terme général.
4. Déterminer A^n.

2 Analyse

Niveau 1

Exercice 5 Étudier les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sqrt{2x+3}; \qquad g : x \mapsto x^2 \ln(x); \qquad h : x \mapsto x \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 6

1. Étudier la convergence des suites de terme général :
$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; $v_n = \dfrac{n(-1)^n}{n^2+1}$; $w_n = \dfrac{3^n + 2^n}{5^n - 1}$.
2. Déterminer le terme général de (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
3. Déterminer le terme général de (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.

Exercice 7 Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{10}{k} 3^{10-k}$.

Niveau 2

Exercice 8 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

1. Étudier la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = \dfrac{1+x^n}{(1+x)^n}$.
2. Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n)$.

Exercice 10 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0, 3]$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 11 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1. Étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.
3. En déduire que la limite de la suite (v_n).

Exercice 12 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = 2 - (u_n)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant -3$.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et préciser sa limite.

3 Probabilités

Niveau 1

Exercice 13 Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour d'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante :

- si la place est réservée le jour k, elle le sera encore le jour $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{9}{10}$
- si la place est libre le jour k, elle sera réservée le jour $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{4}{10}$

Pour k entier positif, on note r_k la probabilité que la place soit réservée le jour k. On suppose que $r_0 = 0$.

1. Déterminer r_1 et r_2.
2. Montrer que, pour tout $k \geqslant 0$, $r_{k+1} = \dfrac{1}{2}r_k + \dfrac{2}{5}$.
3. En déduire r_k en fonction de k.
4. Calculer la limite de la suite (r_k). Interpréter.

Niveau 2

Exercice 14 Un concours de tir à l'arc s'effectue sur deux cibles. Le tireur effectue seulement trois tirs, en changeant de cible à chaque fois. Il gagne le jeu s'il parvient à toucher deux cibles consécutivement. La probabilité de toucher la cible 1 (resp. la cible 2) est p (resp. q), avec $q < p$. On suppose les tirs indépendants.

1. Stratégie 1 : le joueur tire en premier sur la cible 1. Déterminer la probabilité pour qu'il gagne.
2. Stratégie 2 : le joueur tire en premier sur la cible 2. Déterminer la probabilité pour qu'il gagne.
3. Quelle stratégie est la meilleure ?

Niveau 3

Exercice 15 On a $n \geqslant 2$ urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Dans chaque cas, l'urne U_k contient k boules noires et $n-k$ boules blanches.

On choisit une urne puis on tire une boule dans celle-ci. La probabilité de choisir l'urne U_k est égale à ka, pour $a \in \mathbb{R}_+$ fixé.

1. Que vaut a ?
2. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule noire.
3. On tire une boule : elle est noire. Quelle est la probabilité qu'elle soit tirée de l'urne U_3 ?