Révisions CB1

Corrigé

1 Algèbre

Exercice 1 On montre que le système $CX = B$ a une unique solution pour tout $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Résultat : $C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3/4 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

Exercice 2

1. Division euclidienne de $X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$ par $X^2 - 1$: on trouve

$$X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4 = \underbrace{(X^3 - X^2 + 3X)}_{Q(X)}(X^2 - 1) + \underbrace{4 + 3X}_{R(X)}$$

2. $f(-1) = 0$ donc, pour tout réel x, $x + 1$ divise $f(x)$. On réalise la division euclidienne et on trouve $f(x) = (x + 1)(2x^2 - 5x - 3)$. Le trinôme peut encore se factoriser : $f(x) = 2(x + 1)(x + \frac{1}{2})(x - 3)$.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x^2-5x-3$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3 Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. $\det(P) = -4 \neq 0$ donc P est inversible (matrice 2×2) et $P^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

2. On calcule le produit : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Montrons par récurrence que que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

- Initialisation : $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_2$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PD^nP^{-1}$.
  De plus $D = P^{-1}AP$, donc $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$. Alors

$$A^{n+1} = A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

  Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.
- Conclusion : d'après le principe de récurrence, $A^n = PD^nP^{-1}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a, puisque D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$. Il reste à réaliser le produit. On trouve

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + (-3)^n}{2} & \dfrac{1 - (-3)^n}{2} \\ \dfrac{1 - (-3)^n}{2} & \dfrac{1 + (-3)^n}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 4 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On montre que $(A + I_3)(A - 2I_3) = 0_3$ par calcul direct. On en déduit que $A^2 - A - 2I_3 = 0_3$ après développement. On a donc

$$A\underbrace{\left(\frac{1}{2}(A - I)\right)}_{B} = I_3$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = B$, c'est-à-dire

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Attention : ne pas parler de A^{-1} avant d'avoir justifié que A est inversible. D'où l'introduction de la matrice B, qui n'est pas appelée A^{-1} tout de suite.

2. On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que
$$A^n = a_n A + b_n I_3$$
   - Initialisation : $A^0 = I_3 = 0.A + 1.I_3$ on peut donc poser $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
   $$A^{n+1} = A^n A = a_n A^2 + b_n A$$
   Or, $A^2 = A + 2I_3$ d'après la question 1. On a donc
   $$A^{n+1} = (a_n + b_n)A + 2a_n I_3$$
   En posant $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$, on a bien $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I_3$.
   - Par principe de récurrence, on a montré que, en définissant les suites (a_n) et (b_n) par :
   $$\begin{cases} a_0 = 0, \ b_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$$
   on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_n A + b_n I_3$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$, donc (a_n) suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $(EC) : x^2 - x - 2 = 0$ de racines -1 et 2. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$$
Or
$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -\lambda + 2\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{3} \\ \mu = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n$$

4. Il reste à déterminer b_n.
$$\forall n \geqslant 1, b_n = 2a_{n-1} = -\frac{2}{3}(-1)^{n-1} + \frac{2}{3}2^{n-1}$$
D'où
$$\forall n \geqslant 0, b_n = \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n$$
en remarquant que $(-1)^{-1} = -1$ et que la formule est toujours vraie au rang $n = 0$ $(b_0 = 1)$.

On en déduit que
$$A^n = a_n A + b_n I_3 = \left(-\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n\right) A + \left(\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n\right)$$
$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \\ -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \\ -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \end{pmatrix}$$

2 Analyse

Exercice 5 1. $x \mapsto 2x + 3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynomiale). Puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$, par composée f est définie sur
$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 \geqslant 0\} = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[.$$
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc par composée f est dérivable sur
$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 > 0\} = \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[.$$
Pour $x \in \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$,
$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{3}{2},+\infty\right[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=0$.

x	$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
f			$+\infty$
	0	$\nearrow$	

2. Par produit de fonctions usuelles, g est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.
   $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ par produit.
   Pour $x>0$, $g'(x)=2x\ln(x)+x=x\,(2\ln(x)+1)$.
   Puisque $x>0$, $g'(x)$ a le même signe que $2\ln(x)+1$.
   Or, $2\ln(x)+1\geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x)\geqslant -\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x\geqslant \exp\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.
   par stricte croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g	$\Vert$ 0	$\searrow$	$-\frac{1}{2\,\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, $x\mapsto x$ et $x\mapsto \exp(x)$ le sont sur $\mathbb{R}$. Par composée puis produit, h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\exp(x)=1$ donc par composée,
   $$\lim_{x\to\pm\infty}\exp\left(\frac{1}{x}\right)=1.$$
   Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.
   $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x)=0$ donc par composée,
   $$\lim_{x\to 0^-}\exp\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$
   Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=0$.
   En 0^+, il y a une forme indéterminée. Posons $X=\dfrac{1}{x}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}+\infty$.
   $$x\exp\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{X}\exp(X)=\frac{\exp(X)}{X}\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$
   par croissance comparée. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=+\infty$.
   Pour $x\in\mathbb{R}^*$, $h'(x)=\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)\times\dfrac{x-1}{x}$.
   Or, $\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$ donc $h'(x)$ a le même signe que $\dfrac{x-1}{x}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	$0\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 6 1. $\triangleright$ $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$

$\triangleright$ $v_n=\dfrac{n(-1)^n}{n^2+1}$ Soit $n\in\mathbb{N}$, $-1\leqslant(-1)^n\leqslant 1$ donc, puisque $\dfrac{n}{n^2+1}\geqslant 0$, on obtient
$$-\frac{n}{n^2+1}\leqslant v_n\leqslant\frac{n}{n^2+1}$$

Or, $\dfrac{n}{n^2+1} = \dfrac{1}{n+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit, d'après le théorème d'encadrement, que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

▷ $w_n = \dfrac{3^n+2^n}{5^n-1} = \dfrac{3^n(1+(\frac{2}{3})^n)}{5^n(1+(\frac{1}{5})^n)} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \dfrac{1+(\frac{2}{3})^n}{1+(\frac{1}{5})^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
car $\dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{5}$ appartiennent à $]-1,1[$.

2. (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
$x = 3x+1 \leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.
Soit $v_n = u_n + \frac{1}{2}$. Montrons que (v_n) est géométrique de raison 3.
$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + \frac{3}{2} = 3v_n$$
Donc (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. On a donc
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = \frac{5}{2}3^n \text{ donc } u_n = \frac{5}{2}3^n - \frac{1}{2}$$

3. (u_n) suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
L'équation caractéristique est : $(EC) : x^2 - 2x - 3 = 0$. Ses racines sont 3 et -1.
D'après le cours, il existe un unique couple (λ, μ) tel que
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \lambda 3^n + \mu(-1)^n$$
De plus,
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 3\lambda - \mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \frac{5}{4} \\ \lambda = \frac{3}{4} \end{cases}$$
Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{3}{4} \times 3^n + \frac{5}{4} \times (-1)^n$$

Exercice 7 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{1+(2n+1)}{2}(n+1) = (n+1)^2$ (suite arithmétique).
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{10}{k}3^{10-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{10}{k}1^k \cdot 3^{10-k} - \binom{10}{0}1^0 \cdot 3^{10-0} = (1+3)^{10} - 3^{10} = 4^{10} - 3^{10}$,
d'après la formule du binôme de Newton.

Exercice 8 Méthode 1 : Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $k! \leqslant n!$. Par croissance de la somme,
$$\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)n! = (n+1)!$$
Méthode 2 : récurrence (beaucoup plus long).

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

1. Limite en $+\infty$: $f(x) = \dfrac{1+x^n}{(1+x)^n} = \dfrac{\frac{1}{x^n}+1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car c'est une fraction rationnelle et que le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{nx^{n-1}(1+x)^n - n(1+x)^{n-1}(1+x^n)}{(1+x)^{2n}} \\ &= \frac{nx^{n-1}(1+x) - n(1+x^n)}{(1+x)^{n+1}} \\ &= \frac{n(x^{n-1}-1)}{(1+x)^{n+1}} \end{aligned}$$
Or, $x^{n-1} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$\frac{1}{2^{n-1}}$	$\nearrow$	1

2. $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ est le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$, donc
$$\forall x \geqslant 0,\quad f(x) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{donc} \qquad (1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n)$$

Exercice 10 1. Démontrons par récurrence que la propriété
$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad u_n \text{ existe et } u_n \in [0,3]$$
est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : $u_0 = 1$ existe et appartient à $[0,3]$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie : u_n existe et est dans $[0,3]$.
  Puisque $u_n \geqslant 0$, $2u_n + 3 \geqslant 0$ donc $u_{n+1} = \sqrt{2u_n+3}$ existe bien et $u_{n+1} \geqslant 0$.
  De plus, $u_n \leqslant 3$ donc $2u_n + 3 \leqslant 9$ et par croissance de la fonction racine carrée, $u_{n+1} \leqslant \sqrt{9} = 3$.
  On a bien montré que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : d'après le principe de récurrence, la suite (u_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1}-u_n = \sqrt{2u_n+3}-u_n = \frac{(\sqrt{2u_n+3}-u_n)(\sqrt{2u_n+3}+u_n)}{\sqrt{2u_n+3}+u_n} = \frac{2u_n+3-(u_n)^2}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$$

Or, $\sqrt{2u_n+3}+u_n > 0$ car $u_n \in [0,3]$ et $2u_n+3-(u_n)^2 \geqslant 0$ car on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.

3. (u_n) est croissante et majorée par 3 donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ on a, par passage à la limite : $0 \leqslant \ell \leqslant 3$.

De plus, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n+3}$ pour tout n. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ (cours) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2u_n+3} = \sqrt{2\ell+3}$ car $\ell \geqslant -\frac{3}{2}$.

On en déduit que $\ell = \sqrt{2\ell+3}$.

$$\ell = \sqrt{2\ell+3} \Leftrightarrow \ell^2 = 2\ell+3 \Leftrightarrow \ell^2 - 2\ell - 3 = 0 \Leftrightarrow \ell = -1 \text{ ou } \ell = 3.$$

Puisque $\ell \geqslant 0$, on a $\ell = 3$.

$$(u_n) \text{ converge vers } 3.$$

Exercice 11

1. $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$ donc (v_n) est croissante.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{k+1} + \sqrt{k} &= \frac{1-\sqrt{k^2+k}+k}{\sqrt{k}} \\
&= \frac{\left(1+k-\sqrt{k^2+k}\right)\left(1+k+\sqrt{k^2+k}\right)}{\sqrt{k}\left(1+k+\sqrt{k^2+k}\right)} \\
&= \frac{(1+k)^2-\left(\sqrt{k^2+k}\right)^2}{\sqrt{k}\left(1+k+\sqrt{k^2+k}\right)} \\
&= \frac{k+1}{\sqrt{k}\left(1+k+\sqrt{k^2+k}\right)} \geqslant 0
\end{aligned}$$

donc $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.

3. Par croissance de la somme,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$$

On reconnaît une somme télescopique à droite, donc

$$v_n \geqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1} - 1.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1}-1) = +\infty$ donc par minoration $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 12

1. Montrons par récurrence que $u_n \leqslant -3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : $u_0 = -3 \leqslant -3$
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant -3$. Alors par décroissance de la fonction carrée sur $]-\infty, 0]$,

$$(u_n)^2 \geqslant (-3)^2 = 9$$

donc $-(u_n)^2 \leqslant -9$ donc $u_{n+1} \leqslant -7 \leqslant -3$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant -3$.

2. $u_{n+1} - u_n = 2 - (u_n)^2 - u_n = -x^2 - x + 2$ avec $x = u_n$. Étudions le signe du trinôme. On trouve

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-x^2-x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Puisque $x = u_n \leqslant -3$ on a $-x^2-x+2 \leqslant 0$ donc $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$. La suite (u_n) est décroissante.

3. Supposons, par l'absurde, que (u_n) converge. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.

   Puisque $u_n \leqslant -3$ pour tout n, on a $\ell \leqslant -3$ par passage à la limite.

   De plus, $u_{n+1} = 2-(u_n)^2$ donc par passage à la limite,

$$\ell = 2-\ell^2 \text{donc} -\ell^2-\ell+2=0.$$

   Cette équation a déjà été résolue en 2. On trouve $\ell = -2$ ou $\ell = 1$. Puisque $\ell \leqslant -3$, ceci est impossible.

   Donc (u_n) ne converge pas, elle diverge.

   De plus, (u_n) est décroissante donc d'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3 Probablités

Exercice 13 1. Notons R_k :« la place est réservé le jour k ». On a : $P(R_k) = r_k$, $P_{R_k}(R_{k+1}) = \dfrac{9}{10}$ et $P_{\overline{R_k}}(R_{k+1}) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.

De plus $(R_k, \overline{R_k})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= P(R_{k+1}) \\ &= P(R_k)P_{R_k}(R_{k+1}) + P(\overline{R_k})P_{\overline{R_k}}(R_{k+1}) \\ &= r_k \times \frac{9}{10} + (1-r_k)\times\frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{2}r_k + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

2. (r_k) est une suite arithmético géométrique.
   $x = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{5}$.

   Posons alors $v_k = r_k - \dfrac{4}{5}$. Pour tout k,
   $v_{k+1} = \dfrac{1}{2}r_k + \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{2}r_k - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2}(r_k - \dfrac{4}{5}) = \dfrac{1}{2}v_k$. Ainsi, la suite (v_k) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\dfrac{4}{5}$.

   Pour tout k, $v_k = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{2^k}$ donc $r_k = \dfrac{4}{5} - \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{2^k}$.

3. $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k = \dfrac{4}{5}$. Après un grand nombre de jours, la place aura une probabilité proche de $\dfrac{4}{5}$ d'être réservée.

Exercice 14 On note A_k l'événement : « le joueur touche la cible 1 au k-ième tir », B_k l'événement : « le joueur touche la cible 2 au k-ième tir » et G l'événement : « le joueur gagne ».

On a : $P(A_k) = p$ et $P(B_k) = q$.

1. Stratégie 1 : le joueur tire en premier sur la cible 1.
   Alors $G = (A_1 \cap B_2) \cup (\overline{A_1} \cap B_2 \cap A_3)$. Or, les événements $(A_1 \cap B_2)$ et $(\overline{A_1} \cap B_2 \cap A_3)$ sont incompatibles, donc

$$P(G) = P(A_1 \cap B_2) + P(\overline{A_1} \cap B_2 \cap A_3)$$

   De plus, A_1 et B_2 (respectivement $\overline{A_1}$, B_2 et A_3) sont mutuellement indépendants (car les tirs sont indépendants) donc

$$P(G) = P(A_1)P(B_2) + P(\overline{A_1}_P(B_2)P(A_3) = pq + (1-p)qp = pq(2-p)$$

2. Stratégie 2 : le joueur tire en premier sur la cible 2. Alors $G = (B_1 \cap A_2) \cup (\overline{B_1} \cap A_2 \cap B_3)$. Par le même raisonnement que précédemment,

$$P(G) = P(B_1)P(A_2) + P(\overline{B_1}_P(A_2)P(B_3) = qp + (1-q)pq = pq(2-q)$$

3. On a $q < p$ donc $2-q > 2-p$ et donc la probabilité de gagner avec la stratégie 2 et plus forte. Conclusion : il faut commencer par la cible la plus difficile (car le fait de manquer la première cible n'est pas éliminatoire. En revanche, il faudra forcément réussir le 2e tir).

Exercice 15 Notons U_k : « on choisit l'urne U_k » et N :« On tire une boule noire ».

1. $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est un système complet d'événements donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(U_k) = 1$. On a donc $1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka = a\sum_{k=1}^{n} k = a\frac{n(n+1)}{2}$. Ainsi
$$a = \frac{2}{n(n+1)}.$$

2. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$
$$\begin{aligned} P(N) &= \sum_{k=1}^{n} P(U_k)P_{U_k}(N) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(ka \times \frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{2}{n^2(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ P(N) &= \frac{2n+1}{3n} \end{aligned}$$

3. On cherche $P_N(U_3)$. D'après la formule de Bayes,
$$P_N(U_3) = \frac{P(U_3)P_{U_3}(N)}{P(N)} = \frac{3a \times \frac{3}{n}}{\frac{2n+1}{3n}} = \frac{27a}{2n+1} = \frac{54}{n(n+1)(2n+1)}$$